

1日目

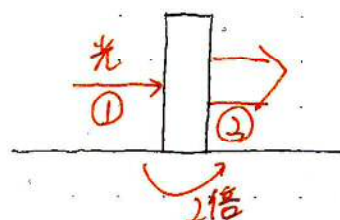
§1. 指数関数

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

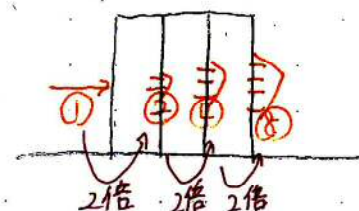
だが、 $2^{\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{15}}$ はどんな値か？

魔法のガラスを例にとり、ここからの値を定めよう

(101)



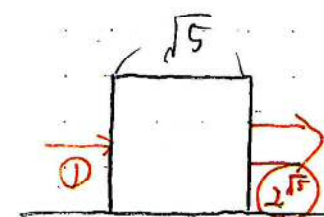
のように、幅1で光を2倍にする魔法のガラスがあるとする。
このガラスが幅3だと



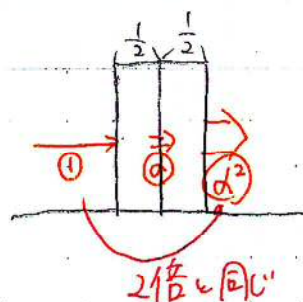
$$\text{光は } \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{2^3} = 8 \text{ 倍になる。}$$

同様に考えれば幅 n (自然数) では、光は $\underbrace{2 \times 2 \cdots \times 2}_{n \text{ 個}} = 2^n$ 倍になる。

これを一般化して幅 x での光の倍率を 2^x と定めることにする。
($x \geq 0$)



では、幅 $\frac{1}{2}$ では、光の倍率を α と置くと



$$x^2 = 2 \text{ かつ } 2^x = \sqrt{2}$$

同様に幅 $\frac{1}{n}$ 2ⁿ は (n: 自然数)

光の倍率を β とおくと
 $\beta^n = 2$ かつ $2^\beta = \sqrt[n]{2}$

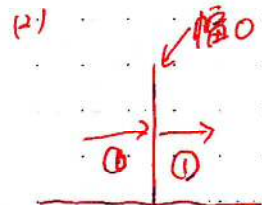
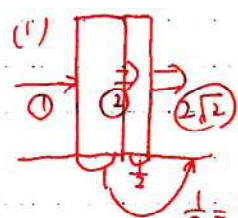
2のn乗根
 (n乗すると2になる数)

$$\therefore 2^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{2}$$

[練習]

(1) $2^{\frac{3}{2}}$ はどんな値か。

$$2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$



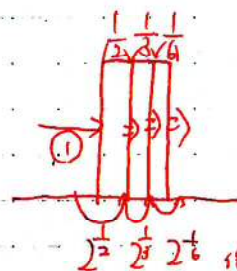
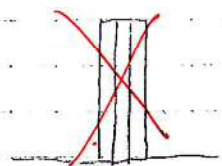
(2) 2^0 はどんな値か。

$$\frac{1}{1}$$

(3) $2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{6}}$

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

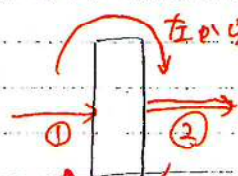
$$2^{\frac{1}{3}} =$$



より幅は $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ (つまり)
 光は $2^1 = 2$ 倍になる。
 $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} = 2 (= 2^1)$

また、 $x < 0$ のとき 2^x の値は?

(例) 2^{-1}



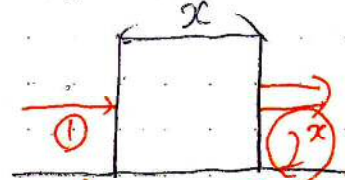
逆向き(右から左)に見ると光は $\frac{1}{2}$ 倍

$$\therefore 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

-1乗は、幅1のガラスを逆向きに見る

同様に考えれば

(例)



逆向きに見ると

$\frac{1}{2^x}$ 倍

$$\therefore 2^{-x} = \frac{1}{2^x} \quad (x \geq 0)$$

ここまでは幅1で光を2倍にするガラスを考えただけ、幅1で光を $\frac{1}{2}$ 倍にするガラスを考えれば (a > 0) a^x も定義でき、

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{a} \\ a^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{a} \quad (n: \text{自然数}) \\ a^{-x} &= \frac{1}{a^x} \end{aligned}$$

これらの結果が成立する。

(例) (102) 指数...乗

$$(i) \frac{1}{2}$$

$$(ii) \frac{1}{4}$$

$$(iii) \frac{1}{8}$$

$$(iv) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

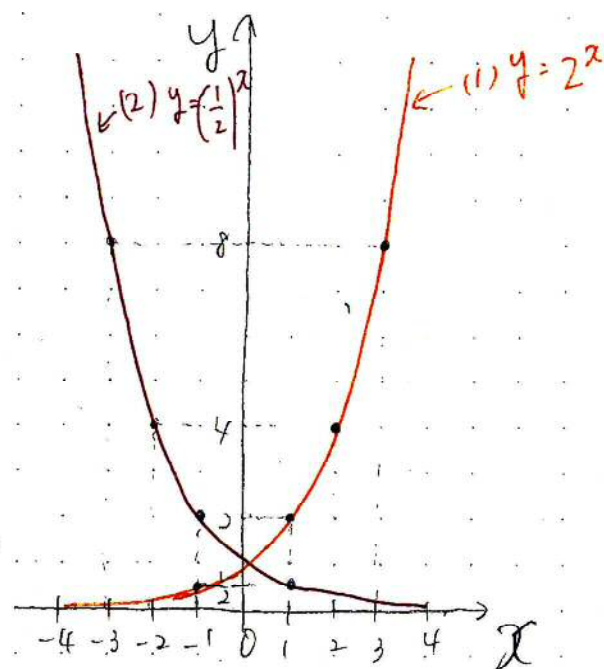
$$(v) \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$(iv) 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(= \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$(v) 2^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(= \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$$

(104)



$$2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

← x座標が(-1)倍

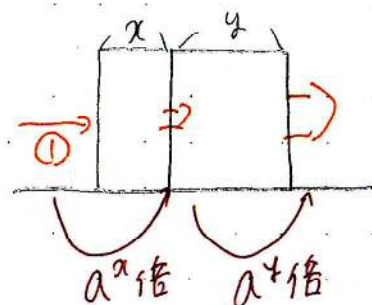
成り立つもの2つ
 (1) $y = 2^x$ の場合
 (2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ の場合
 y軸対称な1対2の3。

指数法則 (103)

以下 $a > 0, b > 0$ とする

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad \text{①}$$

①以下、幅1で光をa倍するガラスを考えよう



合わせ2幅 $x+y$ のガラスを見れば、光は a^{x+y} 倍になるの2

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

↑ 光の倍率は幅に比例する
 ↑ 光の倍率は幅に比例する

(細かくは、 $x, y, x+y$ の符号2)
 場合分けが必要

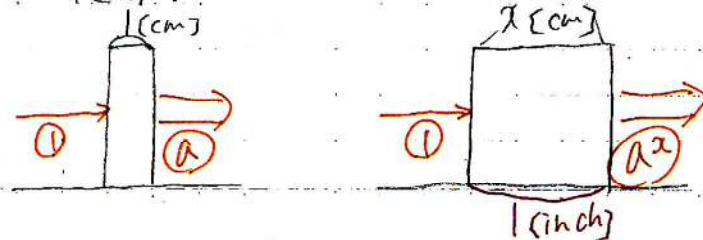
$$a^x \div a^y = a^{x-y} \quad \text{②}$$

↑ 光の倍率は幅に比例する
 ↑ ガラスの幅を引く計算

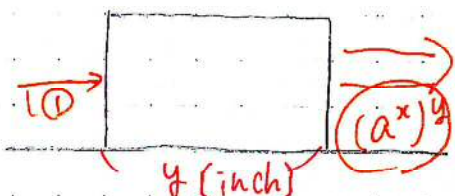
①でもガラスで考えても良いが、①を利用すると
 $(x-y) + y = x$ より
 $a^{x-y} \times a^y = a^{(x-y)+y} = a^x$ 成り立つもの2
 両辺を a^y で割ると
 $a^{x-y} = a^x \div a^y$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y} \quad \text{③}$$

①幅1(cm)で光をa倍にするガラスを考え、 $x(\text{cm}) = 1(\text{inch})$ と定める



幅 1 [inch] 2", 光は a^x 倍にたまた、2"幅の [inch] 2"は



しかし、 y [inch] = $x \cdot y$ [cm] 72 の 2" は $a^{x \cdot y}$ 倍と同じ

$$\therefore (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

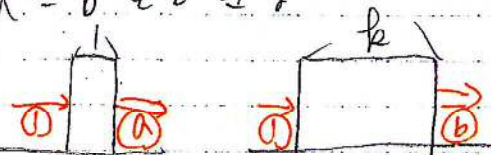
y [inch] は
見掛けの
光の倍率
 $x \cdot y$ [cm]
と見ると
光の倍率

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x \dots (4)$$

$$\textcircled{1} \text{ まず } a = 1 \text{ の時は}$$

$$\underbrace{(1 \cdot b)^x}_{b} = \underbrace{1^x}_{1} \cdot b^x$$

たまた、 $\textcircled{4}$ は成立する
次に $a \neq 1$ の時は幅 1 2" a 倍にするが、うま
幅 (と高さ) を決めると
 $a^k = b$ 2" まで



$$\begin{aligned} \text{すなわち} \\ (\textcircled{4} \text{ の左辺}) &= (a^1 \cdot a^k)^x \quad \textcircled{20} \\ &= (a^{1+k})^x \quad \textcircled{23} \\ &= a^{(1+k)x} \\ &= a^{x+kx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\textcircled{4} \text{ の右辺}) &= a^x \cdot (a^k)^x \quad \textcircled{21} \\ &= a^x \cdot a^{k \cdot x} \quad \textcircled{22} \\ &= a^{x+kx} \end{aligned}$$

$\therefore \textcircled{4}$ の両辺は一致したため $\textcircled{4}$ は成立する

指数法則の練習

$$\begin{aligned} (102) \\ \textcircled{1} \text{ (ii)} \quad 4^{\frac{2}{3}} \times 4^{\frac{1}{2}} &= 4^{\frac{1}{6}} = 4^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}} \\ &= 4^{\frac{4+3-1}{6}} \\ &= 4^2 \\ &= 16 \end{aligned}$$

(105)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ (i)} \quad 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{-\frac{1}{6}} &= 5^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6}} \\ &= 5^{\frac{3+4-1}{6}} \\ &= 5^1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ (ii)} \quad 2^{\frac{1}{3}} \cdot (2^{-2})^{\frac{1}{6}} &= 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} \\ &= 2^{\frac{1-1}{3}} = 2^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ (ii)} \quad 9^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{3}} &= (3^2)^{\frac{2}{3}} \cdot (2^3)^{\frac{2}{3}} \\ &= 3^{2 \cdot \frac{2}{3}} \times 2^{3 \cdot \frac{2}{3}} \\ &= 3^{\frac{4}{3}} \times 2^2 \\ &= 27 \times 4 \\ &= 108 \end{aligned}$$

a は素因数分解
するより小さい数
の計算に直す。

$$\begin{aligned}
 \text{(iv)} \quad 2^{\frac{2}{3}} \cdot 6^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{\frac{1}{12}} &= 2^{\frac{2}{3}} \cdot 6^{\frac{1}{3}} \cdot (3^2)^{\frac{1}{12}} \\
 &= 2^{\frac{2}{3}} \cdot 6^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} \\
 &= 2^{\frac{2}{3}} \cdot (2 \cdot 3)^{\frac{1}{3}} \cdot (3^2)^{\frac{1}{12}} \\
 &= 2^{\frac{2}{3}} \times (2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}) \times 3^{2 \times \frac{1}{12}} \\
 &= 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} \\
 &= 2^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} \\
 &= 2^1 \times 3^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(v)} \quad 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{6}} \cdot 9^{\frac{1}{6}} &= 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{1}{3}} \cdot (2^2)^{\frac{1}{6}} \cdot (3^2)^{\frac{1}{6}} \\
 &= 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{6}} \cdot 3^{\frac{2}{6}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \\
 &= 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{6}} \times 3^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{6}} = 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 6^{\frac{1}{3}} \\
 &= 2^1 \times 3^1 \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(vi)} \quad (2^{\frac{1}{3}})^4 \times (2^{\frac{1}{2}})^3 \times \sqrt[6]{2} &\quad \leftarrow \text{296乘根} \\
 &= 2^{\frac{1}{3} \times 4} \times 2^{\frac{1}{2} \times 3} \times 2^{\frac{1}{6}} \\
 &= 2^{\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{1}{6}} \\
 &= 2^{\frac{4}{3} + \frac{3}{2} + \frac{1}{6}} \\
 &= 2^3 = 8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(vii)} \quad \frac{\sqrt{6}}{2^{-\frac{1}{2}}} &= \sqrt{6} \div 2^{-\frac{1}{2}} \\
 &= (2 \times 3)^{\frac{1}{2}} \div 2^{-\frac{1}{2}} \\
 &= 2^{\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})} \times 3^{\frac{1}{2}} \\
 &= 2^1 \times 3^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(2)} \quad \text{(i)} \quad \sqrt[4]{a} &= (a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}} \\
 &\quad \text{"(a)}^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(i')} \quad \sqrt{a} \sqrt{a} &= \sqrt{a \cdot a} \\
 &= (a^{\frac{2}{2}})^{\frac{1}{2}} \\
 &= a^{\frac{3}{4}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad \frac{\sqrt{a} \sqrt{a} \sqrt{a}}{\sqrt{a} \sqrt{a}} &= \frac{(a^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}}} \\
 &= \frac{a^{\frac{3}{8}}}{a^{\frac{3}{4}}} \\
 &= a^{\frac{3}{8} - \frac{3}{4}} = a^{-\frac{3}{8}} \\
 &= \frac{1}{a^{\frac{3}{8}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iv)} \quad \sqrt[4]{a} \sqrt[4]{a} \sqrt[4]{a} \sqrt[4]{a} &= a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \\
 &= a^{\frac{1}{4}} \cdot (a^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}} \cdot (a^{\frac{3}{2} + \frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}} \\
 &= a^{\frac{1}{4}} \cdot (a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}} \cdot (a^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{2}} \\
 &= a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{7}{4}} = a^{\frac{8}{4}} = a^2
 \end{aligned}$$

(106)

$$\text{(2)} \quad \frac{10^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[10]{10}} \approx 3.16227766016$$

$$\frac{10^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[10]{10}} \approx 1.77827941003$$

$$10^{\frac{1}{8}} \approx 1.33352143215$$

$$10^{\frac{1}{16}} \approx 1.15478198468$$

$$10^{\frac{1}{32}} \approx 1.07460782831$$

$$10^{\frac{1}{64}} \approx 1.03663292843$$

$$10^{\frac{1}{128}} \approx 1.01815172171$$

$$10^{\frac{1}{256}} \approx 1.00903504483$$

$$10^{\frac{1}{512}} \approx 1.00450736424$$

(2)

$$10^{\frac{1}{1024}} = 1.00225114828$$

(3)(2)の結果を利用して $2 = 10^x$ を満たす x は

$$0.3007812 < x < 0.301758$$

1-あることを示せ。

(2)の結果から、2より小さい数を順に探してゆくと $10^{\frac{1}{4}}$ 以下の2"

$$2 \div 10^{\frac{1}{4}} \approx 2 \div 1.77827941003$$

$$\approx \underline{1.12468265038}$$

a を置く

この右辺の a より小さい数を、(2)の結果から探すと $10^{\frac{1}{32}}$

$$\therefore a \div 10^{\frac{1}{32}} \approx \underline{1.04659822937}$$

b を置く

この右辺の b より小さい数を(2)の結果から探すと $10^{\frac{1}{64}}$

$$\therefore b \div 10^{\frac{1}{64}} \approx \underline{1.00961314334}$$

c を置く

この右辺の c より小さい数を(2)の結果から探すと $10^{\frac{1}{128}}$

$$\therefore c \div 10^{\frac{1}{128}} \approx \underline{1.00057292213}$$

d を置く

この d は(2)の結果より小さい "の2"

$$1 < d < 10^{\frac{1}{1024}}$$

$$c \div 10^{\frac{1}{256}}$$

$$b \div 10^{\frac{1}{64}} \div 10^{\frac{1}{256}}$$

$$a \div 10^{\frac{1}{32}} \div 10^{\frac{1}{64}} \div 10^{\frac{1}{256}} = 2 \div 10^{\frac{1}{6}} \div 10^{\frac{1}{32}} \div 10^{\frac{1}{64}} \div 10^{\frac{1}{256}}$$

$$10^{\frac{1}{4}} \times 10^{\frac{1}{32}} \times 10^{\frac{1}{64}} \times 10^{\frac{1}{256}} \text{ を } 2 \text{ の } 2 \text{ 分母を揃えて}$$

$$10^{\frac{1}{4}} \times 10^{\frac{1}{32}} \times 10^{\frac{1}{64}} \times 10^{\frac{1}{256}} < 2 < 10^{\frac{1}{4}} \times 10^{\frac{1}{32}} \times 10^{\frac{1}{64}} \times 10^{\frac{1}{256}} \times 10^{\frac{1}{1024}}$$

$$10^{\frac{77}{256}}$$

$$10^{0.30078125}$$

$$10^{\frac{369}{1024}}$$

$$10^{0.3017578125}$$

2日目

2. さまざまな 10^x
 2^{100} などはどんな数かわかりづらいけれど

$$10^{20} = \underbrace{10 \dots 00}_{0 \text{ が } 20 \text{ 個}}$$

(も含め 22桁)

など 10^x の形はわかりやすい

↓
 さまざまな数を 10^x の形に直してみよう

昨日 (106) で $10^x = 2$ とする x は
 $0.3007 < x < 0.3018$ を満たす x とおける
 (正確には $x = 0.301029 \dots$ (無理数))

これを利用して他の1桁の自然数を 10^x の形に表してみよう。

(201)
 $10^{0.3} < 2 < 10^{0.302} \dots \textcircled{1}$
 を用いて $2/10^x = 3$ とする x の値を小数第2位まで (正しく) 求めよ。

[方針] 大雑把には
 $2 \approx 10^{0.3}$, $10 = 10^1$
 とおいて、2の1/2の 2 , 3 を 2 と 10 のかけ算・わり算 で近似でき
 れば良さそう。

例)
 $3^2 = 9 \approx 10^1$ と近似して、両辺の $\frac{1}{2}$ 乗をとると

$$(3^2)^{\frac{1}{2}} \approx 10^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore 3 \approx 10^{\frac{1}{2}} = 10^{0.5} (= \sqrt{10})$$

(より細かくは $3^2 < 10^1$ より $3 < 10^{0.5}$)

同様に $3^3, 3^4, \dots$ を考えてみると

$$3^3 = 27$$

$$3^4 = 81 \approx 80 = 2^3 \times 10 \text{ より}$$

$$3^4 \approx (10^{0.3})^3 \times 10^1$$

$$= 10^{0.3 \times 3} \times 10^1$$

$$= 10^{0.9} \times 10^1 = 10^{1.9}$$

この両辺の $\frac{1}{4}$ 乗をとると

$$(3^4)^{\frac{1}{4}} \approx (10^{1.9})^{\frac{1}{4}}$$

$$\therefore 3^{\frac{4}{4}} \approx 10^{1.9 \times \frac{1}{4}}$$

$$\therefore 3 \approx 10^{\frac{1.9}{4}} = 10^{0.475}$$

$$\text{同様に } 3^5 = 243 \approx 250 = \frac{1000}{4}$$

と近似すれば

$$3^5 \approx \frac{10^3}{2^2} \approx \frac{10^3}{(10^{0.3})^2}$$

$$= \frac{10^3}{10^{0.3 \times 2}} = \frac{10^3}{10^{0.6}}$$

$$= 10^{3-0.6} = 10^{2.4}$$

$$= 10^{2.4}$$

$$= 10^{2.4}$$

この両辺を $\frac{1}{5}$ 乗すると

$$(3^5)^{\frac{1}{5}} \approx (10^{2.4})^{\frac{1}{5}}$$

$$\therefore 3^{\frac{5}{5}} \approx 10^{2.4 \times \frac{1}{5}}$$

$$\therefore 3 \approx 10^{\frac{2.4}{5}} = 10^{0.48}$$

より細かくは

$$\begin{cases} 3^4 = 81 > 80 \text{ より } 3 > 10^{0.475} \\ 3^5 = 243 < 250 \text{ より } 3 < 10^{0.48} \end{cases}$$

$$0.475 < x < 0.48$$

と不等式で押さえることができる

$$3 = 10^x \text{ とおくと}$$

$$0.475 < x < 0.48$$

(正確には $x = 0.4771213 \dots$ (無理数))

(202 改)

$$\begin{cases} 2 = 10^{0.30103} \\ 3 = 10^{0.47712} \end{cases} \text{の結果と}$$

$$7 = 10^{0.84510} \quad (\leftarrow \text{後述})$$

を認め、2次の表の空欄を埋めよ。

例) $4 = \boxed{2}^2 \approx 10^{0.30103 \times 2}$
 $\approx (10^{0.30103})^2$

$$= 10^{0.60206}$$

$$8 = \boxed{2}^3 \approx 10^{0.30103 \times 3}$$

$$\approx (10^{0.30103})^3$$

$$6 = 2 \times 3 \approx 10^{0.30103 + 0.47712}$$

$$\approx 10^{0.77815}$$

$$= 10^{0.77815}$$

最後に、5は $5 = \frac{10}{2}$ より

$$\begin{aligned} 5 &\approx \frac{10^1}{10^{0.30103}} \\ &= 10^{1-0.30103} \\ &= 10^{0.69897} \end{aligned}$$

(表)

10^x	x
1	0
2	0.30103
3	0.47712
$2 \times 2 = 4$	0.60206
5	0.69897
6	0.77815
7	0.84510
8	0.90309
9	0.95424
10	1

$$9 = \boxed{3}^2 \approx 0.47712 \times 2$$

$$\approx (10^{0.47712})^2$$

(203 #)

$$(1) 2 = 10^x, 3 = 10^y \text{ とする } x, y \text{ は}$$

$$\begin{cases} 0.3 < x < 0.302 & (\because (106)) \\ 0.475 < y < 0.48 & (\because (201)) \end{cases}$$

を満たした。

これを利用して、 $7 = 10^z$ とする
 z を、小数第2位まで求めよ

$$7^2 = 49 \text{ 2"}$$

$$\frac{48}{2^4 \times 3} < 49 < \frac{50}{5 \times 10} = \frac{100}{2}$$

$$2^4 \times 3 \quad 5 \times 10 = \frac{100}{2}$$

と近似すると

$$\begin{aligned} 7^2 &> 48 = 2^4 \times 3 \\ &> (10^{0.3})^4 \times 10^{0.475} \\ &= 10^{0.3 \times 4 + 0.475} \\ &= 10^{1.675} \end{aligned}$$

$$\text{両辺の} \frac{1}{2} \text{乗をとると} \\ (7^2)^{\frac{1}{2}} > (10^{1.675})^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore 7 > 10^{1.675 \times \frac{1}{2}} = 10^{0.8375} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{一方、} 7^2 < 50 = \frac{100}{2} < \frac{10^2}{10^{0.3}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{分母が小さい方が} \\ \text{分数は大きいこと} \end{array} \right.$$

$$= 10^{2-0.3} = 10^{1.7}$$

$$\text{両辺の} \frac{1}{2} \text{乗をとると} \\ 7 < (10^{1.7})^{\frac{1}{2}} = 10^{0.85} \quad \dots \textcircled{2}$$

しかし、①と②より、小数第2位から3.84から7.81の間で、もう少し詳しく近似する

$$\begin{aligned} 7^4 &= 2401 > 2400 = 2^3 \times 3 \times 10^2 \\ &> (10^{0.3})^3 \times 10^{0.475 \times 2} \\ &= 10^{0.3 \times 3 + 0.475 \times 2} \\ &= 10^{3.375} \end{aligned}$$

両辺を $\frac{1}{4}$ 乗すると

$$7 > (10^{3.375})^{\frac{1}{4}} = 10^{0.84375} \dots \textcircled{1}$$

①と②より $7 = 10^z$ とする。Zは

$$0.84375 < z < 0.85$$

(正しい値は
 $z = 0.845098 \dots$ (無理数))

10^x の形の数の応用 (107)

(1) 2^{100} の桁数 (と首位の数字) を求めよ
 1番上の位

2^{100} を 10^x の形に直せば大まかに分り易くなる

$$2 = 10^{0.30103} \text{ だったから}$$

両辺を100乗すると

$$\begin{aligned} 2^{100} &= (10^{0.30103})^{100} \\ &= 10^{0.30103 \times 100} \\ &= 10^{30.103} \end{aligned}$$

10^x の形

更に、この指数 (乗) を

$$30.103 = 30 + 0.103$$

整数 0~1 の小数部分

と分けると

$$\begin{aligned} 2^{100} &= 10^{30.103} \\ &= 10^{30+0.103} \\ &= 10^{30} \times 10^{0.103} \end{aligned}$$

ここで (202) の表より

$$0 < 0.103 < 0.30103 \text{ かつ } z$$

$$\frac{10^0}{1} < 10^{0.103} < \frac{10^{0.30103}}{2}$$

従って、①より

$$10^{30} \times 1 < 200^{100} < 10^{30} \times 2$$

あといつ

$$\begin{aligned} 10^{30} \times 1 &= 100 \dots 00 \leftarrow 31 \text{ 桁} \\ 10^{30} \times 2 &= 200 \dots 00 \leftarrow 31 \text{ 桁} \end{aligned}$$

0から30個

より、 2^{100} も 31桁で、首位の数字は 1

(2) 厚さ 0.1 mm の新聞紙を半分ずつ100回折ると、その厚みは月までの距離を超えるか？ 1回半分に折ると厚みが2倍になると考える。

100回折ると厚みは

$$0.1 \text{ mm} \times 2 \times 2 \times \dots \times 2$$

100個

$$= \frac{0.1}{10} \times 2^{100} \text{ mm}$$

10^{30}

$$\approx 10^{29} \text{ mm}$$

$$= 10^{26} \text{ m} = 10^{23} \text{ km}$$

月までの距離は 38 万 km

$$= 3.8 \times 10^5 \text{ km}$$

で、これより はるかに大きい。

(202)

(2) 3^{100} の桁数と首位の数字を求めよ
 まず、 3^{100} を 10^x の形に直してみよう

$$\begin{aligned} 3 &= 10^{0.47712} \text{ より} \\ 3^{100} &= (10^{0.47712})^{100} = 10^{47.712} \end{aligned}$$

よって 48 桁

$$47.712 = 47 + 0.712$$

$$3^{100} = 10^{\frac{47}{2.3026}} = 10^{20.412}$$

$$= 10^{20} \times 10^{0.412}$$

$$(202) \text{ の表より } 10^{0.69897} < 10^{0.712} < 10^{0.77815}$$

$$\text{よって } 10^{47} \times 5 < 3^{100} < 10^{47} \times 6$$

$\therefore 3^{100}$ は 48桁で首位の数字は 5

(205)

(1) 12^{100} の桁数, 首位の数字を求めよ

まず 12^{100} を 10^x の形に直すと

$$12 = 2^2 \times 3$$

$$= (10^{0.30103})^2 \times 10^{0.47712}$$

$$= 10^{0.60206} \times 10^{0.47712}$$

$$= 10^{1.07918}$$

$$\therefore 12^{100} = (10^{1.07918})^{100}$$

$$= 10^{107.918}$$

$$107.918 = 107 + 0.918$$

$$12^{100} = 10^{107} \times 10^{0.918}$$

$$(202) \text{ の表より } 10^{0.90309} < 10^{0.918} < 10^{0.95424}$$

$$\text{よって } 10^{107} \times 8 < 12^{100} < 10^{107} \times 9$$

$\therefore 12^{100}$ は 108桁で首位の数字は 8

(204)

$(\frac{1}{7})^{100}$ を小数で表わす時, 初め20で7の数字が現れるのは小数第何位で, その数字は何か?

まず $(\frac{1}{7})^{100}$ を 10^x の形に直す

$$(\frac{1}{7})^{100} = 7^{-100} = 10^{(-1) \times 100} = 10^{-100}$$

$$= 10^{-84.510} = 10^{-84} \times 10^{-0.510}$$

$$= 10^{-84} \times 10^{-0.510}$$

$$= 10^{-84} \times 10^{-0.510}$$

$$= 10^{-84} \times 10^{-0.510}$$

整数 0~19 小数部分

$$= 10^{-84} \times 10^{-0.510}$$

$$10^{-84} \times 3 < (\frac{1}{7})^{100} < 10^{-84} \times 4$$

$$10^{-84} \times 3 < (\frac{1}{7})^{100} < 10^{-84} \times 4$$

$(\frac{1}{7})^{100}$ は小数第85位に初め20で7の数字が現れる

$$10^{-84.510} = 10^{-84-0.510} = 10^{-84} \times 10^{-0.510}$$

この値を調べるのに -0.510 と負の値なので (202) の表が使えない。

(202) の表では 10^x の x は $0 \leq x < 1$ の範囲
マイナス乗では使えない!

(205)
(4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$ を小数で表すと初め 20 個の 0 ではない数字が現れるのは小数第何位で、その数字は何か?

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{100} = 3^{-1 \times 100} = 3^{-100}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}\right)^{100} &= 3^{-100} \\ &= 10^{0.47712 \times -100} \quad (10^{0.47712})^{-100} \\ &= 10^{-47.712} \\ &= 10^{-48 + 0.288} \quad \text{0~1 の小数部分} \\ &= 10^{-48} \times 10^{0.288} \end{aligned}$$

$$10^{-48} < 10^{0.288} < 10^{0.30103}$$

1 2 11

$$10^{-48} \times 1 < \left(\frac{1}{3}\right)^{100} < 10^{-48} \times 2$$

$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^{100}$ は小数第 48 位で初め 20 個の 0 ではない数字が 1 が現れる。

答え (205)

(2) 271 桁 (首) 4

(3) (首) 4

(5) 小数第 39 位, 9

3日目

§3. 対数

§2 では
 $7 = 10^{0.84510}$

$\frac{1}{10} = 10^{-\frac{1}{2}} = 10^{-0.5}$

など、さまざまな数を 10^x の形で表した。

↓
 指数 (乗) の部分を主役にして、上の式を

$\log_{10} 7 = 0.84510$

7は10の何乗
 0.84510乗

$\log_{10} \frac{1}{10} = -0.5$

のよりに表す

より一般に $a > 0$ かつ $a \neq 1$ の時
 $y = a^x$ の式を

$\log_a y = x$

yはaの何乗
 x乗

Logarithm

とも書ま、 $\log_a y$ を a を底とする y の対数
 と呼ぶ。

(y の値をこの対数の真数と呼ぶ。)

例) $3^4 = 81 \iff \log_3 81 = 4$

$3^{\frac{5}{2}} = 9\sqrt{3} \iff \log_3 9\sqrt{3} = \frac{5}{2}$

左の式と右の式は
 同じ内容を表す。

(301)
 (1) $10^{0.30103} = 2 \iff \log_{10} 2 = 0.30103$
 $10^{0.47712} = 3 \iff \log_{10} 3 = 0.47712$

この値を調べるのに -0.510 と負の値では (202) の表が使えない。

(202) の表では 10^x の x は
 $0 \leq x < 1$ の範囲
 マイナス乗では使えない!

(205)
 (4) $(\frac{1}{3})^{100}$ を小数で表すと初め 0 でない数字が現れるのは小数
 第何位で、その数字は何?。

$(\frac{1}{3})^{100} = 3^{-1 \times 100} = 3^{-100}$
 $(\frac{1}{3})^{100} = 3^{-100}$
 $= 10^{0.47712 \times -100}$
 $= 10^{-47.712}$
 $= 10^{-48 + 0.288}$
 $= 10^{-48} \times 10^{0.288}$
 $10^{-48} < 10^{-47.712} < 10^{-47.5}$
 $10^{-48} \times 1 < (\frac{1}{3})^{100} < 10^{-48} \times 2$

$\therefore (\frac{1}{3})^{100}$ は小数第48位で初め 0 でない数字が現れる。

答え (205)

(2) 271桁 (首) 4

(3) (首) 4

(5) 小数第39位, 9

$$10^2 = 100 \leftrightarrow \log_{10} 100 = 2$$

$$10^{0.60206} = 4 \leftrightarrow \log_{10} 4 = 0.60206$$

($\because 4 = 2^2 = 10^{0.30103 \times 2} = 10^{0.60206}$)

(2) (i) $\log_2 4 = 2$ ($\because 4 = 2^2$)

(ii) $\log_2 1 = 0$ ($\because 1 = 2^0$)

(iii) $\log_2 0 = \text{値なし}$ ($\because \log_2 0 = x$ とおくと, $0 = 2^x$ と同じ式になる
2を満す x の値はない)

(iv) $\log_2 \frac{1}{2} = -1$ ($\because \frac{1}{2} = 2^{-1}$)

(v) $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$ ($\because \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$)

(vi) $\log_2 \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{3} - \frac{3}{2}$ ($\because 2\sqrt{2} = 2^1 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$ より
 $\frac{1}{2\sqrt{2}} = (2\sqrt{2})^{-1} = (2^{\frac{3}{2}})^{-1} = 2^{-\frac{3}{2}}$)

(vii) $\log_2 (-1)$ は値なし

(viii) $\log_4 8 = \frac{3}{2}$ ($\because 4 = 2^2$ より, $2 = 4^{\frac{1}{2}} (= \sqrt{4})$
 $\therefore 8 = 2^3 = (4^{\frac{1}{2}})^3 = 4^{\frac{3}{2}}$)

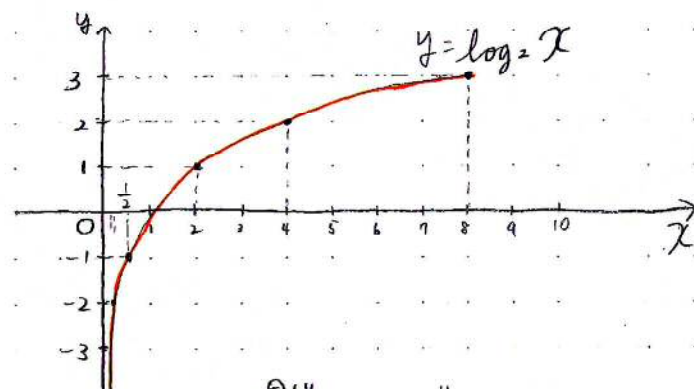
(ix) $\log_{\frac{1}{2}} 2 = -\frac{1}{3}$ ($\because \frac{1}{2} = 2^{-1}$ より, $2 = (\frac{1}{2})^{-1}$ 両辺の $-\frac{1}{3}$ 乗をとると
 $(\frac{1}{2})^{-\frac{1}{3}} = (2^{-1})^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} = 2$)

(x) $\log_{-3} 3$ は値なし
左の a は $a > 0$ かつ $a \neq 1$ を
満す a と定めた。

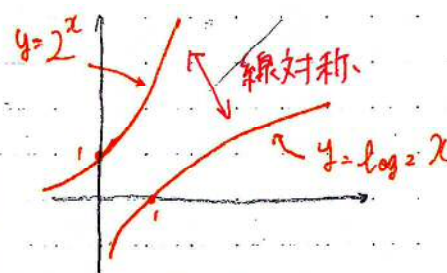
($\because \log_{-3} 3 = x$ と置くと, これは
 $3 = (-3)^x$... ① と同じ式
両辺の絶対値をとると
 $3 = 3^x$ であり, これを満す x の値は
 $x = 1$ だけだが, $x = 1$ は
①を満す x ではない, 不適

[補足] (iii), (vii) と同様に, $\log_a x$ といふ真数 x は, $x > 0$ といふこと
真数条件

(302) $y = \log_2 x$ のグラフ
さきの補足から代入できる範囲は $x > 0$ である。



$y = \log_2 x \iff x = 2^y$
たの x の y のグラフは (104) で描いた $y = 2^x$ の y の x と y (縦と横) を入れ替えてもの。



対数法則 (cf (303)(2))

$$X = \log_a x \iff x = a^X$$

かうスの幅 X の倍率 x

たの y 指数関数では, かうスの幅 X から倍率 x
対数関数では, 倍率 x からかうスの幅 X
を計算できる
よって (103) 指数法則で

$$a^{x+y} = a^x \times a^y \quad \dots ①$$

波長の幅は
足し算 光の倍率
はかけ算

$$a^{x-y} = a^x \div a^y \quad \dots ②$$

波長の幅は
引き算 光の倍率
は割り算

が成立したのぞ、これを対数の記号に直すと

$$\log_a(x \times y) = \log_a x + \log_a y \quad \dots ①'$$

光の倍率
はかけ算 波長の幅は
T=し算

$$\log_a(x \div y) = \log_a x - \log_a y \quad \dots ②'$$

光の倍率
はわり算 波長の幅は
引き算

とすると

$$① \quad x = a^x, y = a^y \text{ と置く } \log_a x = x, \log_a y = y$$

$$\therefore (①' \text{の右辺}) = x + y$$

一方①'の左辺は

$$x \cdot y = a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad (\because ①)$$

$$\therefore \log_a(x \cdot y) = x + y$$

(①'の左辺)

①'の両辺は一致する
(②'も同様)

また、指数法則には

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y} \quad \dots ③$$

もあつたので、これを対数の記号に直すと

$$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x \quad \dots ③'$$

$$① \quad x = a^x \text{ と置く } \log_a x = x$$

すると、③'の左辺は $x^y = (a^x)^y = a^{x \cdot y} \quad (\because ③)$ より

$$\log_a(x^y) = x \cdot y$$

(③'の左辺) $\log_a x$

$$= (③' \text{の右辺})$$

まとめ 対数法則

$$\log_a(x \times y) = \log_a x + \log_a y \quad \dots ①'$$

$$\log_a(x \div y) = \log_a x - \log_a y \quad \dots ②'$$

$$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x \quad \dots ③'$$

logの中身のY乗は
Y倍にして logの4倍に<<4あせ

(303)

(3) 次の式を(7)の対数で表せ。

$$(i) \log_6 2 + \log_6 18 \quad \text{①'}$$

$$= \log_6 (2 \times 18)$$

$$= \log_6 36 = 2 \quad (\because 36 = 6^2)$$

$$(ii) \log_6 18 - \log_6 2 \quad \text{②'}$$

$$= \log_6 \left(\frac{18}{2} \right)$$

$$= \log_6 9$$

$$= \log_6 (3^2)$$

$$= 2 \cdot \log_6 3 \quad \text{③'}$$

$$(iii) \log_6 (\sqrt{2}+1) - \log_6 (\sqrt{2}-1) \quad \text{③'}$$

$$= \log_6 \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right)$$

$$= \log_6 \left(\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} \right)$$

$$= \log_6 ((\sqrt{2}+1)^2)$$

$$= 2 \cdot \log_6 (\sqrt{2}+1)$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iv)} \quad & 3 \times \log_6 (\sqrt[3]{5}) \\
 &= 3 \times \log_6 (5^{\frac{1}{3}}) \\
 &= 3 \times \frac{1}{3} \times \log_6 5 \\
 &= \log_6 5 \quad \text{③}
 \end{aligned}$$

(305) 対数法則の練習
(1) 式の値を求めよ

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & \log_6 9 + \log_6 4 = \log_6 (9 \times 4) \\
 &= \log_6 36 \\
 &= 2 \quad \text{①}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad & \log_3 108 - \log_3 4 = \log_3 \left(\frac{108}{4} \right) \\
 &= \log_3 27 \\
 &= 3 \quad \text{②}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iii)} \quad & \log_5 5\sqrt{5} = \log_5 \sqrt[3]{125} \\
 &= \log_5 (125^{\frac{1}{3}}) \\
 &= \frac{1}{3} \times \log_5 125 \\
 &= \frac{1}{3} \times 3 = 1
 \end{aligned}$$

$$\text{(iv)} \quad 7^{\log_7 10} = 10$$

$$\begin{aligned}
 & (\because x = \log_7 10 \text{ と置く}) \\
 & 10 = 7^x = 7^{\log_7 10}
 \end{aligned}$$

[補足]

(iv) と同様に考えれば
一般に $(a > 0, a \neq 1, x > 0)$

$$a^{\log_a x} = x$$

底の変換公式

(304)

$$\begin{aligned}
 \text{(1)} \quad & \begin{cases} a = C^x \\ b = C^y \end{cases} \text{ の時} \\
 & b = a^{\frac{y}{x}} \text{ である} \\
 & \text{これを対数の法則として表せ。}
 \end{aligned}$$

まず $a = C^x$ の両辺を $\frac{1}{x}$ 乗すると

$$\begin{aligned}
 a^{\frac{1}{x}} &= (C^x)^{\frac{1}{x}} \\
 &= C^{x \times \frac{1}{x}} = C \\
 \therefore b &= C^y = (a^{\frac{1}{x}})^y \\
 &= a^{\frac{y}{x}} = a^{\frac{y}{x}}
 \end{aligned}$$

この式を a を底とする対数で表すと

$$\begin{aligned}
 \log_a b &= \frac{y}{x} \\
 &= \frac{\log_c b}{\log_c a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a = C^x & x = \log_c a \\ b = C^y & y = \log_c b \end{cases}$$

まとめ底の変換公式

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

底 a の対数を他の底 c に変換する

例) 3 は 2 の何乗か? (cf (206)(1))

$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$$

$$\approx \frac{0.47712}{0.30103}$$

$$\approx 1.5849$$

$$\therefore 3 \approx 2^{1.5849}$$

練習 次の値を求めよ

$$(1) \frac{\log_7 81}{\log_7 3} = \log_3 81 = 4$$

$$(2) (\log_4 5) \times (\log_5 6) \times (\log_6 7) \times (\log_7 8)$$

底を2で統一すると
(与式)

$$\begin{aligned} &= \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \times \frac{\log_2 6}{\log_2 5} \times \frac{\log_2 7}{\log_2 6} \times \frac{\log_2 8}{\log_2 7} \\ &= \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

(305)

(3) $a = \log_2 3$, $b = \log_2 5$ とする。次の値を a, b の式で表せ。

$$\text{例)} \log_2 \frac{10}{9} \quad \left. \begin{array}{l} \text{分子・分母を素因数分解} \\ \text{底を2で統一} \end{array} \right\}$$

$$= \log_2 \frac{2 \times 5}{3^2} = \log_2 2 + \log_2 5 - \log_2 (3^2)$$

$$= \log_2 2 + \log_2 5 - 2 \log_2 3$$

$$= -2a + b + 1$$

$$\begin{aligned} (i) \log_2 45 &= \log_2 (3^2 \times 5) \\ &= \log_2 (3^2) + \log_2 5 \\ &= 2 \log_2 3 + \log_2 5 \\ &= 2a + b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \log_2 100 &= \log_2 (2^2 \times 5^2) \\ &= \log_2 (2^2) + \log_2 (5^2) \\ &= 2 \log_2 2 + 2 \log_2 5 \\ &= 2 + 2b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (iii) \log_4 15 &= \frac{\log_2 15}{\log_2 4} \\ &= \frac{\log_2 (3 \times 5)}{2} \\ &= \frac{(\log_2 3) + (\log_2 5)}{2} \\ &= \frac{a + b}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (iv) \log_3 5 &= \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \\ &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (v) \log_{10} 81 &= \frac{\log_2 81}{\log_2 10} \\ &= \frac{\log_2 (3^4)}{\log_2 (2 \times 5)} \\ &= \frac{4 \log_2 3}{\log_2 2 + \log_2 5} \\ &= \frac{4a}{1 + b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (vi) \log_{\sqrt{5}} \sqrt{10} &= \frac{\log_2 \sqrt{10}}{\log_2 \sqrt{5}} \\ &= \frac{\log_2 (10^{\frac{1}{2}})}{\log_2 (5^{\frac{1}{2}})} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \log_2 (2 \times 5)}{\frac{1}{2} \log_2 (5)} \\ &= \frac{\log_2 (2 \times 5)}{\log_2 5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \log_2 (2 \times 5)}{\frac{1}{2} \cdot \log_2 (3 \times 5)} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \cdot (\log_2 2 + \log_2 5)}{\frac{1}{2} \cdot (\log_2 3 + \log_2 5)} \\
 &= \frac{\frac{1+b}{2}}{\frac{a+b}{2}} \\
 &= \frac{1+b}{2} \times \frac{2}{a+b} \\
 &= \frac{1}{a}
 \end{aligned}$$

約分できる

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \log_2 (2 \times 5)}{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \log_2 (3 \times 5)} \\
 &= \frac{\log_2 2 + \log_2 5}{\log_2 3 + \log_2 5} \\
 &= \frac{1+b}{a+b}
 \end{aligned}$$

4日目

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \log_2 (2 \times 5)}{\frac{1}{2} \cdot \log_2 (3 \times 5)} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \cdot (\log_2 2 + \log_2 5)}{\frac{1}{2} \cdot (\log_2 3 + \log_2 5)} \\
 &= \frac{\frac{1+b}{2}}{\frac{a+b}{2}} \\
 &= \frac{1+b}{a+b} \times \frac{2}{2} \\
 &= \frac{1+b}{a+b}
 \end{aligned}$$

約分できると

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \log_2 (2 \times 5)}{\frac{1}{2} \cdot \log_2 (3 \times 5)} = \frac{\log_2 2 + \log_2 5}{\log_2 3 + \log_2 5} = \frac{1+b}{a+b}$$

(307)

サイコロを n 回振る

以下 $\log_{10} 2 = 0.30103$

$\log_{10} 3 = 0.47712$ としとる。

(1) 出た目全 n 個 1 の目であるような確率 $\left(\frac{1}{6}\right)^n$ の 1 を下回るときは、 n 個以下以上 n 個以上?

出た目全 n 個 1 の目である確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^n$ だから、求める n の条件は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^n < \frac{1}{10^8} \quad (*)$$

両辺を 10^x の形に直しても良いが、10 を底とする対数をとって、2 指数 (乗) だけ抜き出して計算する。

$$\log_{10} \left(\frac{1}{6}\right)^n < \log_{10} \frac{1}{10^8}$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} (6^{-n}) < \log_{10} (10^{-8})$$

$$\Leftrightarrow -n \cdot \log_{10} 6 < -8 \cdot \log_{10} 10$$

$$\Leftrightarrow n \cdot \log_{10} 6 > 8 \quad (*)$$

(↑ 2 倍して 10 とする)
(乗数反転)

こゝで

$$\begin{aligned}
 \log_{10} 6 &= \log_{10} (2 \times 3) \\
 &= \log_{10} 2 + \log_{10} 3 \\
 &= 0.30103 + 0.47712 \\
 &= 0.77815 \quad \text{「約 0.8」}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (*) \quad n &> \frac{8}{\log_{10} 6} = \frac{8}{0.77815} \\
 &= 10.280 \dots
 \end{aligned}$$

$\therefore n$ は 11 以上

(2) n 回振った時に、同じ目が続く2出ることをたまたま T といいよ。
 このようには確率が $\frac{1}{6}$ 億分の1を下回るのよ、 n がいくつ以上の時か？
 n 回振った時に、同じ目が続く2出ることをたまたま T といい確率は

$$\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{5}{6}$$

1回目は何でも良い
2回目以降は直前の目以外

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

$$\text{これを } \frac{1}{6} \text{ 億分の1を下回るとは } \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} < \frac{1}{10^8}$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} \left(\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right) < \log_{10} \frac{1}{10^8}$$

$$\Leftrightarrow (n-1) \cdot \log_{10} \frac{5}{6} < -8 \dots (*)$$

$$\Leftrightarrow n-1 \cdot \log_{10} \frac{5}{6} < -8$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow n-1 & \log_{10} \frac{5}{6} \\ &= \log_{10} \frac{5}{6} - \log_{10} 6 \end{aligned}$$

$$= \frac{\log_{10} 5}{\frac{1}{2}} - \log_{10} 6$$

$\log_{10} 5 \approx 0.6990$
 $\log_{10} 6 \approx 0.7782$
 $\therefore (*)$

$$= -0.07918$$

たまたま $(*)$ は、

$$(n-1) \cdot (-0.07918) < -8$$

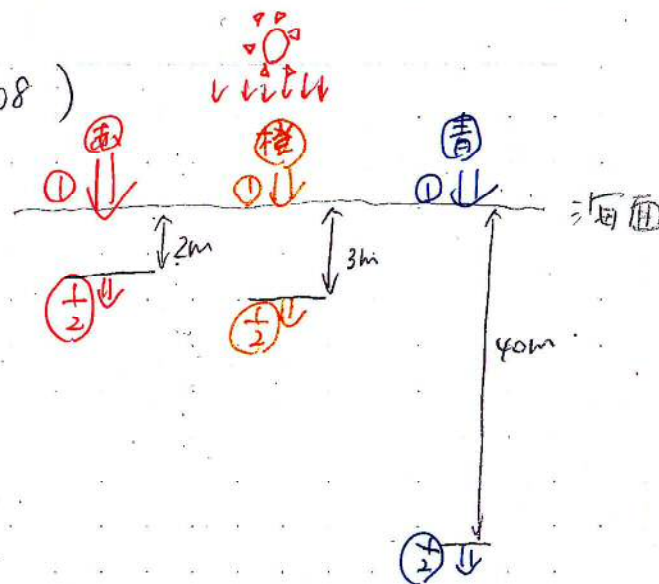
$$\Leftrightarrow n-1 \geq \frac{-8}{-0.07918}$$

$$= 101.03 \dots$$

$$\Leftrightarrow n > 102.03 \dots$$

$\therefore n$ は 103 以上

(308)



(1) 深さ x m での各色の光の強さを x で表せ。

・赤色光

2m ごとに $\frac{1}{2}$ 倍になるから x m では $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{2}}$ 倍

・橙色光や青色光も同様 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{2}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{40}}$ 倍

(3) 赤色光、橙色光の強さが $\frac{1}{10000}$ 倍になる深さを求めよ。

・赤色光

(1) より、求める深さ x の条件は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{40}} \times \frac{1}{10000} \dots (*)$$

赤色光

青色光

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{2}} \div \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{40}} = \frac{1}{10^4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{2} - \frac{x}{40}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{19}{40}x} = 10^{-4}$$

10 を底とする対数をとる

$$\log_{10} \left(2^{\frac{19}{40}x} \right) = \log_{10} (10^{-4})$$

$$\Leftrightarrow -\frac{19}{40}x \cdot \frac{\log_{10} 2}{0.30103} = -4$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \cdot \frac{40}{19} \cdot \frac{1}{0.30103} = 27.974 \dots \text{ m}$$

・ 橙色光

④ 同様に

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{x}{40}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{x}{40}} = \frac{1}{10000}$$

橙色光

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{x}{40}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{x}{40}} = \frac{1}{10^4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{37}{120}x} = \frac{1}{10^4}$$

10を底とする対数をとる

$$\log_{10} \left(2^{-\frac{37}{120}x} \right) = \log_{10} (10^{-4})$$

$$\Leftrightarrow -\frac{37}{120}x \cdot \frac{\log_{10} 2}{0.30103} = -4$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \times \frac{120}{37} \times \frac{1}{0.30103} \Leftrightarrow x = 4 \times \frac{120}{37} \times \frac{1}{0.30103} = 4.047 \dots$$

(4) ダイビングスコープは深さ130~40mの深さである。その深さで普通に写真を撮ると、ストロボをたいて撮るとは違うのか？

(3)の結果より深さ30~40mでは、赤、橙色光は青色光の1/10000倍になる。そのまま撮ると青い写真になる。ストロボをたくと、赤、橙色光が補われて本来の色で写真が撮れる。

§ 対数表と概数計算

10を底の対数を常用対数と呼び、しばしば左を略して、単に $\log x$ と略記する

(401) 常用対数表 ← p.44-45

(202) 作った表をもっと細かくした表 p.44~45 の表

例) $\log_{10} 3.14 = ?$

p.44の表で

$$\therefore \log_{10} 3.14 = 0.49693$$

この表のままでは、1.00~9.99 の範囲しか調べられない p.44, $\log_{10} 314$ などは

$$314 = 3.14 \times 10^2$$

1.00~9.99の範囲に

収めることができる。

と変形すれば

$$\log_{10} 314 = \log_{10} (3.14 \times 10^2) = \log_{10} 3.14 + \log_{10} (10^2)$$

0.49693

2

$$= 2.49693$$

(1) 対数表を利用して、次の値を調べよ

$$(a) \log_{10} 2 = \log_{10} 2.00 \\ = 0.30103$$

$$(c) \log_{10} 232 = 0.36549$$

$$(j) \log_{10} 3600 = \log_{10} (3.60 \times 10^3) \\ = \log_{10} 3.60 + \log_{10} (10^3) \\ = 0.55630 + 3 \\ = 3.55630$$

$$(k) \log_{10} 0.0021 = \log_{10} (2.1 \times 10^{-3}) \\ = \log_{10} 2.1 + \log_{10} (10^{-3}) \\ = 0.32222 - 3 = -2.67778$$

$$(n) \log_{10} 2.016$$

↑ 有効数字が4桁のはずと仮定して、 $2.016 = \frac{50.4}{5^2} = \frac{5.04}{2.5}$

$$= \log_{10} 5.04 - \log_{10} 2.50 \\ = 0.70243 - 0.39794 \\ = 0.30449$$

[補足] 2016を素因数分解して

$$2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7 \times 10^{-3} \quad \text{と分けて計算しても良い。}$$

$$(p) \log_{10} \frac{1}{28} \\ = \log_{10} (28^{-1}) \\ = (-1) \cdot \log_{10} 28 \\ = -\log_{10} (2.80 \times 10) \\ = -(\log_{10} 2.80 + 1)$$

$$= -(0.44716 + 1) \\ = -1.44716$$

(2) 対数表を逆に引く2次のおおよその値を求めよ

$$(a) 10^{0.4} = 2.51$$

p.44の表の内側から、0.4に近い数を探すと2.51と2.52の間。
以下、誤差は切り捨てることにすると $10^{0.4} = 2.51$

$$(y) 10^{0.8} = 6.31 \quad 6.30 \quad \leftarrow \text{切り捨てる} \quad \left((10^{0.4})^2 = 10^{0.4 \times 2} = 10^{0.8} \quad \text{2桁目まで} \right)$$

$$(b) 10^{1.52} = 33.1$$

$$10^{1.52} = 10^{1 + 0.52} = 10^1 \times 10^{0.52} = 10 \times 3.31 = 33.1$$

$$(z) 10^{1.52} = 33.1$$

$$= (10^{1.52})^{\frac{1}{2}}$$

$$= 10^{1.52 \times \frac{1}{2}}$$

$$= 10^{0.76}$$

$$= 5.75$$

(402)

(1) $2.4^{3.6}$ はおおよそいくらか?

§2で練習したように 10^x の形に直して考える

$$\text{まず} \log_{10} 2.40 = 0.38021 \text{ より}$$

$$2.4 = 10^{0.38021}$$

次に3.6乗する

$$2.4^{3.6} = (10^{0.38021})^{3.6}$$

$$= 10^{0.38021 \times 3.6}$$

$$= 10^{1.368756}$$

$$= 10^{1 + 0.368756} = 10^1 \times 10^{0.368756}$$

$$= 10 \times 2.34 = 23.4$$

$$= 10^1 \times 10^{\frac{0.368952}{2.33}}$$

$$= \underline{23.3}_4$$

(2) π^π はおおよそいくら?

まず, $\log_{10} \pi \approx \log_{10} 3.14$

$$\log_{10} 3.14 = 0.49693$$

$$\pi = 10^{0.49693}$$

$$\pi^\pi = \left(10^{0.49693} \right)^{3.14}$$

$$= 10^{0.49693 \times 3.14}$$

$$= 10^{1.561155}$$

$$= 10^1 \times 10^{0.561155}$$

$$= 10^1 \times 3.64$$

$$= \underline{36.4}_4$$

$$\log_{10} \pi \approx \log_{10} 3.14$$

$$= 0.49693$$

$$\pi \approx 10^{0.49693}$$

$$\pi^\pi \approx (10^{0.49693})^\pi$$

$$\approx 10^{0.49693 \times 3.1416}$$

$$\approx 10^{1.561155}$$

$$= 10^1 \times 10^{0.561155}$$

$$= 10^1 \times 3.64$$

$$= \underline{36.4}_4$$

(403) 大小比較

(1) $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ と $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$ の大小を比較せよ

(402) と同様 (= $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$, $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$) のおおよその値を計算し、その大小を比較せよ。ただし、 $\log_{10}(\sqrt{2}^{\sqrt{3}})$ と $\log_{10}(\sqrt{3}^{\sqrt{2}})$ の大小を比較すればよい。

$$\log_{10}(\sqrt{2}^{\sqrt{3}}) = \sqrt{3} \times \log_{10}(\sqrt{2})$$

$$= \sqrt{3} \times \frac{1}{2} \times \log_{10} 2$$

$$\approx 1.7320 \times \frac{1}{2} \times 0.30103$$

$$\approx 0.26069 \dots$$

$$\text{同様に } \log_{10}(\sqrt{3}^{\sqrt{2}}) = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} \times \log_{10} 3$$

$$\approx 1.4142 \times \frac{1}{2} \times 0.47712$$

$$\approx 0.33737 \dots$$

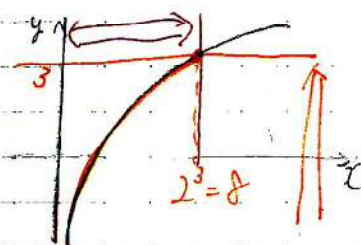
$$\therefore 2 \log_{10}(\sqrt{2}^{\sqrt{3}}) < \log_{10}(\sqrt{3}^{\sqrt{2}}) \quad \text{だから、}$$

$$\sqrt{2}^{\sqrt{3}} < \sqrt{3}^{\sqrt{2}}$$

(501) 予備編

例) $\log_2 x \leq 3 \dots$ ① を解け

$y = \log_2 x$ のグラフをかく。② $y \leq 3$ となる x の範囲を求めよ。



$$\therefore x \leq 8$$

0 < x ≤ 8

$$\therefore 0 < x \leq 8$$

5日目

ほりびは1日目は米1粒で2日目以降は前日の2倍とする
(1)100日間でもらえる米の量はどのくらい?

$$= \underline{2^{100}} - 1$$
$$= 2^{86} \times \underline{2^{14} \text{ 粒}}$$

3合

$$= 10^{0.30103 \times 86 + 0.47712}$$

$$= 10^{26.3657} \quad \checkmark$$
$$\approx 10^{26} \times 2.32 \text{ 合 (并数表)}$$
$$= 10^{23} \times 2.32 \text{ Å}$$

一定の太さの弦が一定の張力で張られてゐる時、弦の振動数は弦の長さ L に反比例する振動数が2倍(弦の長さ L が $\frac{1}{2}$ 倍)になると、人間の耳には1オクターブ高い音として聞える。音の高さはド→ド $\sharp$ →...→シ→ドのように半音ずつ上がり、2倍くと、振動数は一定倍率で増え、2倍くと

(1) D⁴の音が出る弦の長さをしとすると、三つの音が出るようには弦の長さを求めよ。

ト[♮]から、1オクターブ高いト[♮]まで、半音12個分音
は高くなるので、振動数は2倍になるのぞ、半音1
個分音が高くなると振動数は $2^{\frac{1}{12}}$ 倍

$$\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^4 = 2^{\frac{1}{12} \times 4} = 2^{\frac{1}{3}} \text{ 倍}$$
$$= 10^{\frac{0.230103}{3}}$$

弦の長さは振動数に反比例するので、およそ

$$\frac{1}{1.25} = 0.8$$

ソの音
ド $\rightarrow$ ソだと半音7個分だから振動数は $(2^{\frac{1}{12}})^7 = 2^{\frac{7}{12}}$ 倍

$$2^{\frac{7}{12}} = (10^{0.30103})^{\frac{7}{12}} = 10^{0.10103 \times \frac{7}{12}}$$
$$\begin{aligned} &= 10 \frac{2.10721}{12} \\ &= 10.175600833 \\ &\approx 1.49 \end{aligned}$$
$$\frac{1}{1.49} = 0.6711$$

∴ 弦の長さは 0.671

(2) ド、ミ、リ の振動数の比はほぼ何対何対何か?

(1) より 振動数の比は

$$1 : 1.25 : 1.49$$

$$\approx 4 : 5 : 6$$

ニハハハ整数比に近づくドミリの音は耳に心地よく響く
(∵ ドミリの音波を重ね合わせるときれいな波形になる)

実際、(1) より ミ の音の振動数は 1.26 に近かったことで
ドミリの和音をキレイに響かせるにはミの音を少し
低めに調音すると良い

(501) 対数の方程式、不等式
次の方程式、不等式を解け

$$(2) 2 \cdot \log_3 x = 4 \quad \dots (2)$$

$$\log_3 x = 2$$

$$x = 9$$

$$(2) 2 \cdot \log_3 x = 4$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x = \frac{4}{2} = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 3^2 = 9$$

$$(1) \log_3 (x^2) = 4 \quad \dots (1)$$

$$x^2 = 81$$

$$x = 9$$

$$(1) \log_3 (x^2) = 2 \cdot \log_3 x \quad \dots (1)$$

たゞし (1) は (2) と同じ方程式... 2 は (1) の
対数の中身 (真数) は (+) の値
でなければならない (真数条件)

① は $x > 0$ であるが $x < 0$ のとき
は成立しない。

② は $x < 0$ のとき成立しない (1) の $x < 0$
の解が正しく計算していない!
そこで (1) の x^2 を計算する

$$\Leftrightarrow x^2 = 3^4 = 81$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{81} = \pm 9$$

[補足]

(203) 2 示した対数法則は

$$\log_a (x^y) = y \cdot \log_a x$$

$\log$ の中身が全て正 ($x^y > 0$ か $x > 0$) の場合が前提

④ を $x < 0$ も含め正しく書くと

$$\log_3 (x^2) = 2 \cdot \log_3 |x|$$

$$(3) \log_3 (x(x+2)) \leq 1 \quad \dots (3)$$

まず、 $\log$ の中身 (真数) が正だから

$$x(x+2) > 0 \text{ が前提}$$

$$\Leftrightarrow x < -2, 0 < x \quad \dots (*)$$

以下、この条件 (*) のもとで

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow x(x+2) \leq 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq 0$$

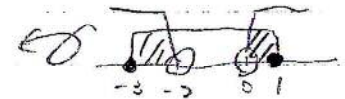
$$(x+3)(x-1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$$

このうち、(*) も満たさなければいけないので、

③ の解は

$$-3 \leq x < -2, 0 < x \leq 1$$



$$(4) \log_3 x + \log_3 (x+2) \leq 1 \quad \dots (4)$$

今度は $\log$ が 2 つあるので

$$x > 0 \text{ か } x+2 > 0 \text{ が前提}$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ か } x > -2$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \quad \dots (*)'$$

以下、この条件 (*)' のもとで

④の左辺は

$\log_3(x(x+2))$ と変形できるの z 、あと $1/3$ と同様に

$$-3 \leq x \leq 1$$

但し、前提条件が $(*)z$ は T は $(*)T$ の z 、④の解は

$$0 \leq x \leq 1$$

まとめ 真数条件

$$\log_3 x + \log_3 (x+2) = \log_3 (x(x+2))$$

真数条件は

$$x > 0, x+2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \dots (*)'$$

真数条件は

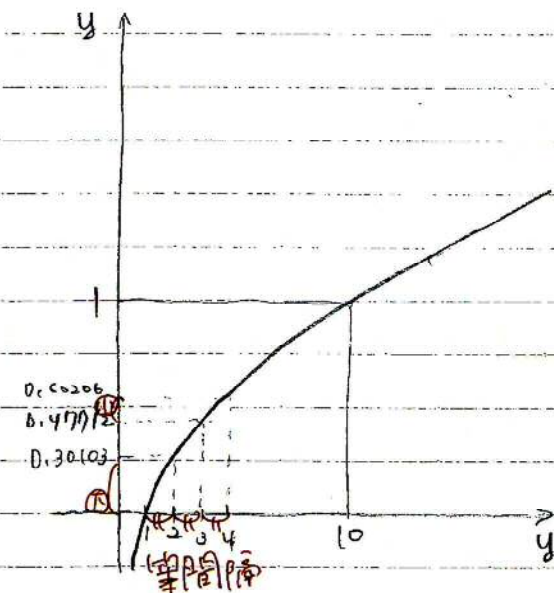
$$x - (x+2) > 0$$

$$\Leftrightarrow x < -2, 0 \leq x \dots (*)$$

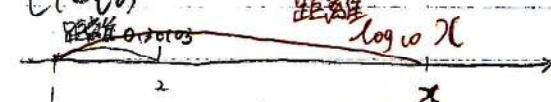
のように、式変形によって真数条件は変化してしまうので、まず真、次に $\log$ の中身が $(*)$ である条件を考慮する

対数目盛り

(302) と同様に、 $y = \log_{10} x$ のグラフを描くと

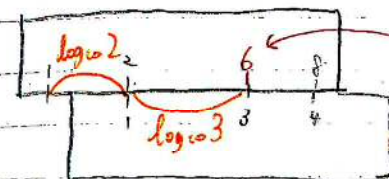


この y 軸上には、 x 座標の数を目盛りとしたもの



を対数目盛りと言う

例) 計算 R

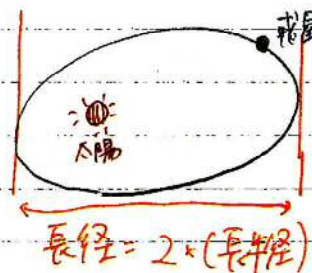


$$\log_{10} 2 + \log_{10} 3 = \log_{10} (2 \times 3) = \log_{10} 6$$

このように2つの尺をずらすだけで、かけ算・割り算が実行できる。

ケプラーの法則

第1法則: 惑星は太陽を1つの焦点とする楕円軌道を描く



第3法則: 惑星の公転周期の 2 乗と軌道の長半径の 3 乗の比は惑星によらず一定

この第3法則を、以下の T - A を用いて自分で発見してみよう

この両対数方眼紙に点を打つと、だいたい一直線上に並ぶ

(2) (1) の図から第3法則を再発見せよ

(1) の直線は傾き p およそ 1.5 なのぞ

$$\frac{\log_{10} T}{\log_{10} L} \approx 1.5$$

$\log_L T$ (底の変換)

$$\begin{aligned} \therefore T &\approx L^{1.5} \\ \therefore T^2 &\approx L^3 \end{aligned}$$

(503)

$$2^0 =$$

$$2^1 =$$

$$2^2 =$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

1

2

4

8

16

32

64

128

256

512

1024

2048

(1) 2 の n 乗乗数で、首位 p 1 であるもの

のうち 4桁、5桁、6桁の数を求めよ

4桁: $2^{10} = 1024$

5桁: $2^{14} = 16384$

6桁: $2^{19} = 131072$

では首位 p 1 の、2 の n 乗乗数はどんな規則性で並んでいるのだろうか?

(2)

具体例から桁 p 1 つ増えに直後は、必ず首位 p 1

よって、 n 桁で首位 p 1 の数も $(1 \text{ つ } T = 4)$ 存在する。

首位 p 1 の数の個数の割合は

$$\frac{608 \text{ 個}}{2020 \text{ 個}} \approx 0.30099 \dots$$

$$\log_{10} 2$$

(3) $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{2019}$ の内、首位 p 1 の数は何個あるか?

桁 p 1 つよくなるたびに、首位 p 1 の数 p 1 個ずつあるのぞ

2^{2019} の桁数 n だけ首位 p 1 の数 p 1 存在する

$$2^{2019} = (2^{0.30103})^{2019} = 10^{0.30103 \times 2019} = 10^{607.77 \dots}$$

$\therefore 2^{2019}$ は 608 桁の 92 の 92 は 608 個

ケプラーの法則

デニマークの天文学者タイコ・ブラーエは、25年にわたって惑星の精密な観測データをとっていた。
 当時は

「惑星の運行は神が支配し、完全無欠な神は完全無欠な図形(円)のみを用いる」

と信じられていたが、ブラーエの助手であるケプラーは、火星が円の軌道を描くとして、どうしても誤差が生じることに気がついた。そこで6年かけて計算をやり直し、ついに有名なケプラーの法則を見出した。

- 第1法則：惑星は太陽を一つの焦点とする「楕円」軌道上を動く。
- 第2法則：惑星と太陽を結ぶ線分が、一定時間に描く面積は一定である。

- 第3法則：惑星の公転周期の ? 乗と軌道の長半径の ? 乗の比は、惑星によらず一定である。

この第3法則を、以下のデータを用いて、自分で発見してみよう。

長半径 L [AU]	公転周期 [日]	公転周期 T [地球との比]
水星	0.38709	0.24085
金星	0.72333	224.70
地球	1.0000	365.24
火星	1.5236	686.96
木星	5.2033	4335.3
土星	9.5370	10757
天王星	19.191	30589
海王星	30.068	59800
冥王星	39.481	90588
		248.02

- (1) 惑星の軌道の長半径 [AU] を L 、公転周期 [地球との比] を T とする。
 上の表を参考にして、各惑星のデータ (L, T) を右の面対数方眼紙にプロットせよ。
- (2) (1) のプロットを参考に、ケプラーの第3法則を完成させよ。

■ タイコ・ブラーエ (Tycho Brahe 1546 ~ 1601) は、デニマークの天文学者。
 ヨハネス・ケプラー (Johannes Kepler 1571 ~ 1630) は、ドイツの天体物理学者。
 ■ AU は天文単位。1 AU = 149,597,870,691 m.

