

1日目

指数・対数関数

§1 $2 = 10^x$ となる x は?

問題1-1

$2^{8258993} - 1$ を 10 進法で表すと何桁くらい?

$2^{10} = 1024 \approx 10^3$ なので、これで概算してみると

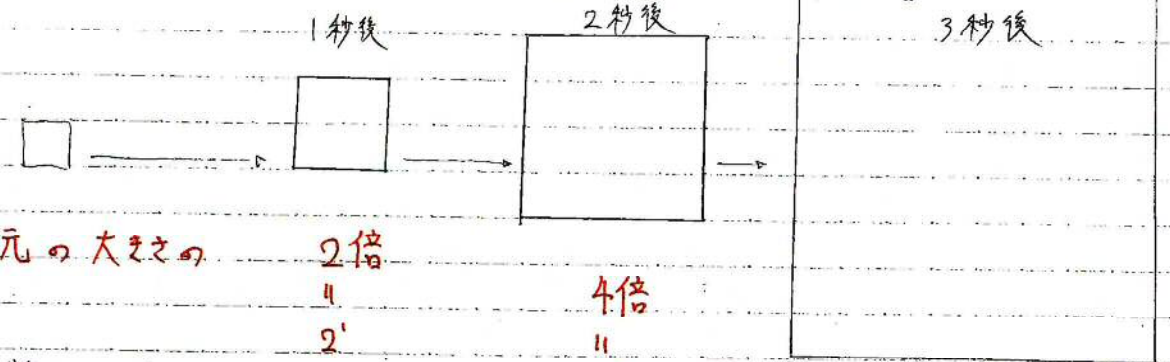
$$2^{8260万} = (2^{10})^{826万} \approx (10^3)^{826万} = 10^{2478万}$$

なので、一番近い c) の 24862048 桁だろう!

まずは、こんな計算をもうとぎちりと換えるようになろう。

⇒ 「べき」の考え方

① 毎秒 2 倍の割合でものを大きくする「ビュッライト」を考える



自然数 n に対して

n 秒間 ライトをあてたとき (2 の累乗)

大きさは 元の大きさの $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$ 倍になる

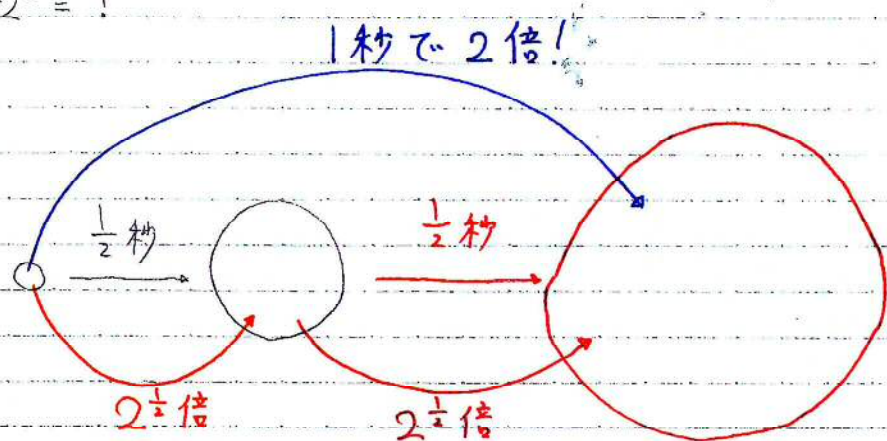
n 回

⇒ (自然数とは限らないときも)

このライトを x 秒間 あてたときの大きさを元の大きさの 2^x 倍としよう

倍率としてこの数を決める

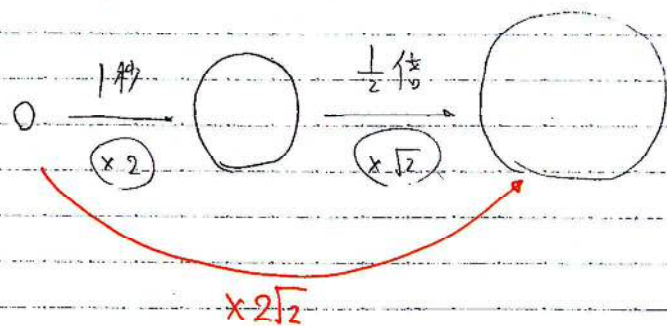
① 例 $2^{\frac{1}{2}} = ?$



$$2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2$$

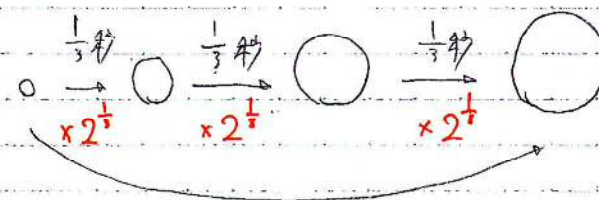
$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \quad (2^{\frac{1}{2}} \text{は大きさの倍率なので正の数であるため})$$

確認 $2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$



他にも $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ の3乗と考えると $2^3 = 80\sqrt{}$ と考えたが
 下りる

① 例 $2^{\frac{1}{3}} = ?$



1秒で2倍

と考えると $(2^{\frac{1}{3}})^3 = 2$ で $2^{\frac{1}{3}}$ は2の3乗根 $\sqrt[3]{2}$ と呼ばれるもの

おまけ $2^0 = 1$ ライトをあててないので、大きさそのまゝ!

① 例 $2^{\frac{1}{2}} : 2^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{1}{6}} = ?$

ライトを合計 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ 秒あててるので
 $= 2$

と分かる!

同様に、正の整数 a に対して

$$a^x$$

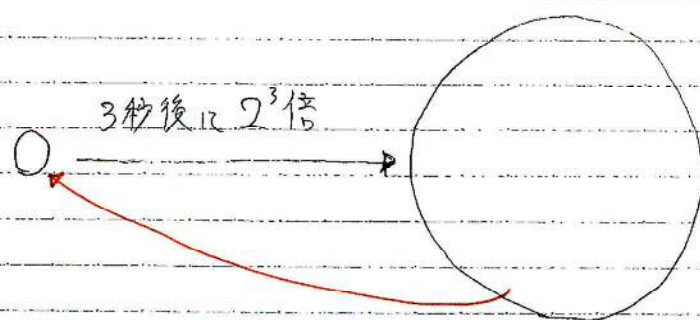
を考えるとわかる

この a^x は「 a を底、 x をべき指数とするべき」といい、
 「 a の x べき」(あるいは今まで通り「 a の x 乗」) と呼ぶ。

負の指数について？

例 2^{-3} なる

「毎秒2倍のビュグライト」もあてているときの
3秒前の大きさが今の何倍か
を表していると考えられる



「-3秒後」=「3秒前」には
 $\frac{1}{2^3}$ 倍!

$$\Rightarrow 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

「...秒前」もビデオの逆再生で考えれば、

「毎秒 $\frac{1}{2}$ 倍のスモールライト」もあてているのと同じことになるので、

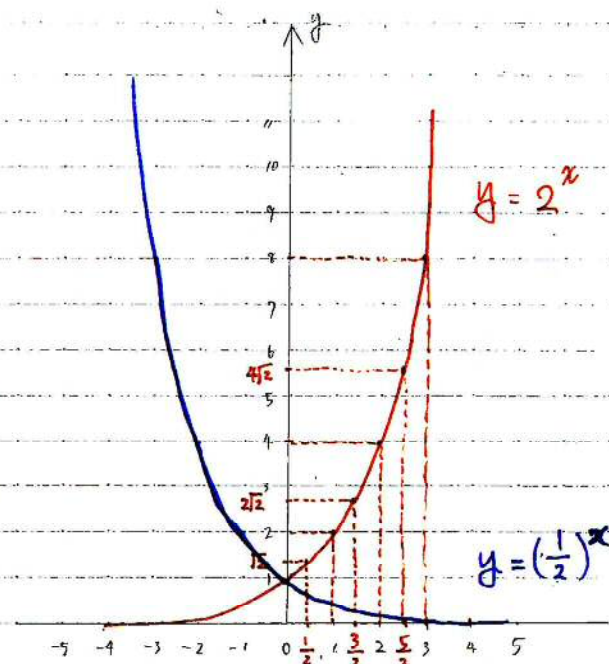
$$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \text{ でもある}$$

同様に 正の数 a に対して $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$

テキスト (104)

(1) $y = 2^x$ のグラフ

(2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフ



気づくこと

(1) と (2) のグラフは y 軸対称 ... $y = a^x$ と $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ のグラフでもそう

y の片方が 1 ... $y = a^x$ のグラフはいつもそう

グラフは x 軸の上側にある ... $y = a^x$ のグラフはいつもそう

少し真面目なまとめ $y = a^x$ のグラフは ($a > 0$)

(i) $a > 1$ のとき

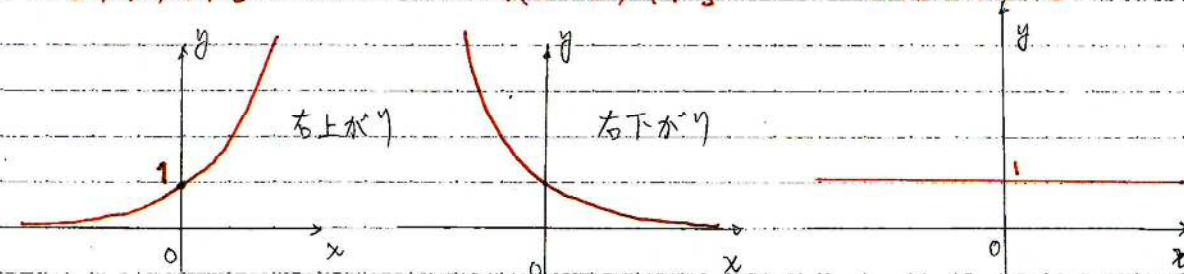
(ii) $0 < a < 1$ のとき

(iii) $a = 1$ のとき

「ビュグライト」

「スモールライト」

「ただのライト」



指数法則

a^x に関する計算規則

$a > 0, b > 0$ のとき、

① $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$... ライトを点けた時間の合計と思えば
 x, y の符号によらず納得できる!

② $a^x \div a^y = a^{x-y}$
 ある人は $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$... これは $\frac{1}{a^y} = a^{-y}$ となることから
 $\frac{a^x}{a^y} = a^x \cdot a^{-y} = a^{x-y}$ で納得できる!

③ $(a^x)^y = a^{xy}$

毎秒 a^x 倍のライトを
 y 秒あてたときの倍率

毎秒 a 倍のライトを
 xy 秒あてたときの倍率

... 毎秒 a 倍のライトをあてているところを録画して
 x 倍で再生すると、毎秒 a^x 倍のライトをあてているように見える
 これで y 秒の倍率 $(a^x)^y$ は
 元々 a 倍のライトを xy 秒あてているので、 a^{xy} に等しい!

④ $(ab)^x = a^x \cdot b^x$... 毎秒 a 倍、 b 倍のライトを
 x 秒間同時にあてても
 ずっとあてても、倍率は同じだろうと
 思えば納得できる!

これら ①~④ を指数法則と呼ぶ

解

(105.) (i) $5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{6}} = 5^1 = 5$

(ii) $2^{\frac{1}{3}} \times (2^{-2})^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}} = 1$

(iii) $9^{\frac{2}{3}} \times 8^{\frac{2}{3}} = (2^2)^{\frac{2}{3}} \times (2^3)^{\frac{2}{3}} = (2^2)^{\frac{1}{3}} \times (2^2)^{\frac{1}{3}} \times (2^2)^{\frac{1}{3}} = (2^2)^1 = 4$

(iv)

(v) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{6}} \cdot 9^{\frac{1}{6}}$
 $= 2^1 \cdot 3^1 = 6$

(vi) $(2^{\frac{1}{3}})^4 \cdot (2^{\frac{1}{3}})^3 \cdot \sqrt{2}$

(105)

$$(1) (i) 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6}} = 5^1 = \boxed{5}$$

$$(ii) 2^{\frac{1}{3}} \times (2^{-2})^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{3}} \times \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{3}} = \boxed{1}$$

$$= 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 2^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}$$

$$= 2^0$$

$$= \boxed{1}$$

$$(iii) 9^{\frac{3}{2}} \cdot 8^{\frac{2}{3}} = 9^1 \cdot 9^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} = 9 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = \boxed{108}$$

$$= (3^2)^{\frac{3}{2}} \cdot (2^3)^{\frac{2}{3}} = 3^3 \cdot 2^2 = \boxed{108}$$

$$(iv) 2^{\frac{2}{3}} \cdot 6^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{\frac{1}{12}}$$

$$9^{\frac{1}{12}} = (3^2)^{\frac{1}{12}} = 3^{\frac{1}{6}}$$

$$6^{\frac{1}{3}} = (2 \cdot 3)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 2^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = \boxed{2\sqrt{3}}$$

自然数のべきを整理するときは、素数ごとに見ていくと
無難だそう。

$$(v) 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{6}} \cdot 9^{\frac{1}{6}} = (2 \cdot 3)^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{1}{3}} \cdot (4 \cdot 9)^{\frac{1}{6}}$$

$$= 6^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{1}{3}} \cdot (6^2)^{\frac{1}{6}} = (6^{\frac{1}{3}})^3 = \boxed{6}$$

$$= 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot (2 \cdot 3)^{\frac{1}{3}} \cdot (2^2)^{\frac{1}{6}} \cdot (3^2)^{\frac{1}{6}}$$

$$= 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}$$

$$= (2^{\frac{1}{3}})^3 \cdot (3^{\frac{1}{3}})^3 = 2 \cdot 3 = \boxed{6}$$

$$(vi) (2^{\frac{1}{3}})^4 \cdot (2^{\frac{1}{2}})^3 \cdot 6\sqrt{2} = 2^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{6}}$$

$$= 2^{\frac{4}{3} + \frac{3}{2} + \frac{1}{6}} = 2^3 = \boxed{8}$$

$$(vii) \frac{\sqrt{b}}{2^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt{b} \div 2^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{b} \div \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{b} \times \sqrt{2} = \boxed{2\sqrt{3}}$$

$$(i) \sqrt[4]{a} = \sqrt{a^{\frac{1}{2}}} = (a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}}$$

$$(ii) \sqrt{a\sqrt{a}} = \sqrt{a \cdot a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{a^{\frac{3}{2}}} = (a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}} = \boxed{a^{\frac{3}{4}}}$$

$$(iii) \frac{\sqrt[4]{a\sqrt{a}}}{\sqrt{a\sqrt{a}}} = \frac{\sqrt[4]{a^{\frac{3}{2}}}}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{a^{\frac{3}{8}}}{a^{\frac{3}{4}}}$$

$$= a^{\frac{3}{8} - \frac{3}{4}} = \boxed{a^{-\frac{3}{8}}} \times \frac{\sqrt{a\sqrt{a}}}{\sqrt{a\sqrt{a}}} = \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{a}}} \text{ と使うのもあり}$$

$$(iv) \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt{a\sqrt{a}} = a^{\frac{1}{4}} \cdot (a^1 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}$$

$$= a^{\frac{1}{4}} \cdot (a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{7}{8}} = \boxed{a^{\frac{9}{8}}}$$

問題1-2

2^{100} に ついて 考えてみよう!

(1) $2^{10} \approx 10^3$ なのよ

$$2^{100} \approx (2^{10})^{10} \approx (10^3)^{10} = 10^{30}$$

さ、と 31桁 の 数だろ!

$$\begin{array}{r} 100 \dots 0 \\ 0 \text{ 桁 } 303 \end{array}$$

この計算は $2^{10} \approx 10^3$ を 利用してゐるが、

$$\text{今となっては } 2 = 10^x$$

と、 2 を 10 の べきで 表せることを 知ってゐる

この x が どんな 数か 求めてみよう

$$2^{10} \approx 10^3$$

$$\therefore 2 = (2^{10})^{\frac{1}{10}} \approx (10^3)^{\frac{1}{10}} = 10^{0.3}$$

つまり、(1) の 計算は $x \approx 0.3$ として 考えてゐる

も、と きちんと 振うと

$$2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$$

$$\therefore 2 > 10^{0.3}$$

なので、 $x > 0.3$ が 言えてゐる

(2) x を 小数第2位まで 求めたい

$$2^3 = 8 < 10^1 \quad \therefore 2 < 10^{\frac{1}{3}}$$

これから、 $x < \frac{1}{3} = 0.333\dots$ が 言える

($0.3 < x < 0.333\dots$ これは 小数第1位まで)

$$2^{13} = 8192 < 10^4 \quad \therefore 2 < 10^{\frac{4}{13}}$$

これから、 $x < \frac{4}{13} = 0.307\dots$ が 言えるので、

$$0.3 < x < 0.307\dots$$

したがって、 $x = 0.30\dots$ と 小数第2位まで 正確に 求める!

(3) $2 = 10^{0.307\dots}$ と 分かるので

$$2^{100} = 10^{30.7\dots} \quad \text{なので、} \quad 10^{30} < 2^{100} < 10^{31}$$

これで、 2^{100} は 正確に 31桁だと 分かる!

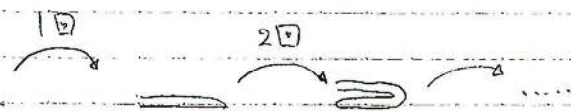
② $2 = 10^x$ と なる x を より 正確に 知れば、

分かることも 増えるはず... **これが 明日の 話題**

おまけ ① $2^{100} \approx 10^{30}$ くらい

(4) 有名な話

厚さ 0.1 mm の紙を



2枚重ね 4枚重ね

紙は $2^{100} \approx 10^{30}$ 枚重ねられているので、

$$\text{厚さは } 0.1 \times 10^{30} \text{ mm}$$

$$= 10^{29} \text{ mm}$$

$$= 10^{26} \times 10^3 \text{ mm} \quad 10^3 \text{ mm} = 1 \text{ m}$$

$$= 10^{26} \text{ m} \quad 10^3 \text{ m} = 1 \text{ km}$$

$$= 10^{23} \text{ km} \quad 10^{13} \text{ km} \div 10^3 \text{ km} = 10^{20}$$

$$\approx 10^{10} \text{ ly} \quad \text{light year}$$

10^4
 10^8
 10^{12}
 10^{16}
 10^{20}

あと3回くらい折ると宇宙の直径くらいの厚みになった?

高1 春期 指数・対数関数 §1 $2=10^x$ となる x は？

問題 1-1

メルセンヌ素数とは、

$2^p - 1$, p は素数
の形に表される素数のことである。

2020 年 3 月現在、知られているメルセンヌ素数は全部で 51 個あり、そのうち最大のものは 2018 年の 12 月に発見された

$2^{82,589,933} - 1$
である。これは現在知られている最も大きな素数でもあり、10 進法で表すと (あ)
桁の数になっている。

空欄 (あ) にあてはまる数を、以下から選びなさい。

- a) 9,152,052 b) 17,425,170 c) 24,862,048 d) 32,249,425

■ 余談

このような素数が注目される理由の一つは完全数（正の整数 N であって、そのすべての正の約数の和が $2N$ となるもの）である。

メルセンヌ素数 $2^p - 1$ に対して、 $2^{p-1}(2^p - 1)$ が完全数であることは紀元前から知られているが（ユークリッドの『原論』に証明が書かれている）、18 世紀、レオンハルト・オイラーによって、偶数の完全数はこの形に書かれるものに限られることが示された。したがって、偶数の完全数を探すことは、メルセンヌ素数を探すことと全く同じである。

偶数の完全数（メルセンヌ素数）が有限個しかないのか、無数に存在するのかは、未解決の問題である。なお、奇数の完全数が存在するか否かも未解決である。

問題 1-2

- (1) 2^{100} は何桁くらいの数か。
- (2) $2=10^x$ となる x を、小数第 2 位まで正確に求めなさい。
- (3) 2^{100} の桁数を正確に求めなさい。
- (4) 厚さ 0.1mm の新聞紙を、半分ずつに、仮に 100 回折ることができたとすると、その厚みはどのくらいになるだろうか。
- (5) 新聞紙を 100 回折ることはできるだろうか。

■ 参考

地球の赤道半径	約 6388km
地球と月の距離	約 384400km
地球と太陽の距離	約 1.5 億 km
1 光年(ly)	約 10 兆 km
天の川銀河の直径	約 10 万 ly
天の川銀河とアンドロメダ銀河の距離	約 250 万 ly
観測可能宇宙の直径	約 930 億 ly
原子の半径	約 10^{-10} m
原子核の大きさ	約 10^{-15} m

高1 春期 指数・対数関数 宿題-1

※ 明日解答を配布します。

宿題 1-1

簡単にしなさい。

$$(1) 9^{\frac{1}{2}} \quad (2) 8^{-\frac{2}{3}} \quad (3) 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{6}}$$

$$(4) \frac{2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{5}{12}}} \quad (5) \frac{16^{-\frac{7}{6}} \cdot 16^{\frac{5}{4}} \cdot 16^{-\frac{3}{2}}}{16^{-\frac{2}{3}}}$$

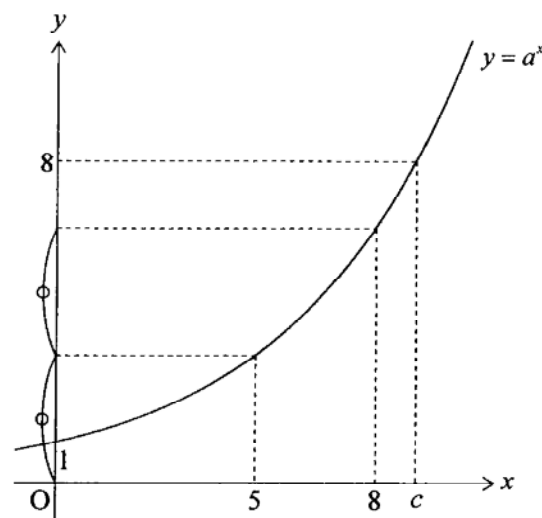
宿題 1-2

$a > 0$ とする。次を a^x の形に表しなさい。

$$(1) a\sqrt{a} \quad (2) \sqrt{a\sqrt{a}} \quad (3) \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}$$

宿題 1-3 (テキスト, チャレンジ応用 1-1)

図において, c の値を求めなさい。



■ 次はチャレンジ問題です。

宿題 1-4#

§1 では

$$2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3 \quad \therefore 2 > 10^{\frac{3}{10}} = 10^{0.3}$$

$$2^{13} = 8192 < 10000 = 10^4 \quad \therefore 2 < 10^{\frac{4}{13}} = 10^{0.307...}$$

であることから, $2 = 10^x$ となる x は, $x = 0.30...$ であると, 小数第2位まで正確に求めた。

- (1) $3^5 < 250$, $2 > 10^{0.3}$ を用いて, $3 < 10^{0.48}$ を示しなさい。
- (2) $3 = 10^y$ となる y を, 小数第2位まで正確に求めなさい。
- (3) $7 = 10^z$ となる z を, 小数第2位まで正確に求めなさい。

■ 授業で言い忘れたときのための用語の補足

正の数 a と実数 x に対して, a^x で表される数を考えたが, この数を

a を底(base), x をべき指数(exponent)とするべき(power)

といい, 「 a の x べき」などと呼ぶ。

べき指数が自然数 n のべきは,

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ 個}}$$

となるが, このように「同じ数をいくつかかけたもの」のことは累乗という。累乗 a^n については, 「 a の n 乗」と呼ぶのが一般的である。 x が自然数ではない実数のときにも, a^x のことを「 a の x 乗」と呼んでしまうことも多い (目くじらを立てられることはないはず)。

2日目

§2 さまざまな 10^x
昨日: $2 = 10^x$ とする x は?

あ) $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$
 なのて、
 $(2^{10})^{\frac{1}{10}} > (10^3)^{\frac{1}{10}} \therefore 2 > 10^{0.3}$

い) $2^{13} = 8192 < 10000 = 10^4$
 なのて、
 $(2^{13})^{\frac{1}{13}} < (10^4)^{\frac{1}{13}} \therefore 2 < 10^{\frac{4}{13}} = 10^{0.307...}$

よ、? $10^{0.3} < 2 < 10^{0.307...}$
 $2 = 10^{0.30...}$
 $(x = 0.30...)$
 と分かった

続けちゃった!

$3 = 10^y$ とする y は?

$3^2 = 9 < 10$ より $3 < 10^{\frac{1}{2}}$

これと同じか...

$3^3 = 27$

$2^3 \cdot 10 = 80 < 3^4 = 81 < 100 = 10^2$ より $3 < 10^{\frac{2}{4}} = 10^{\frac{1}{2}}$

$3^5 = 243$

$3^6 = 729$

$3^7 = 2187$

$3^8 = 6561$

(ア) $3^4 = 81 > 80 = 2^3 \cdot 10$ ← 2 をかけ算にうつさず、3 は
 ここで、 $2 > 10^{0.3}$ を用いれば、
 $3^4 > 2^3 \cdot 10 > (10^{0.3})^3 \cdot 10 = 10^{0.9} \cdot 10^1 = 10^{1.9}$
 $\therefore 3 > 10^{\frac{1.9}{4}} = 10^{0.475}$
 気付きやすいかも

(イ) $3^5 = 243 < 250 = \frac{1000}{4} = \frac{10^3}{2^2}$ ← 割り算を使う
 ここで、 $2 > 10^{0.3}$ より $\frac{1}{2} < \frac{1}{10^{0.3}}$ なのて、
 $3^5 < \frac{10^3}{2^2} < \frac{10^3}{(10^{0.3})^2} = \frac{10^3}{10^{0.6}} = 10^{2.4}$
 $\therefore 3 < 10^{\frac{2.4}{5}} = 10^{0.48}$
 2, 3 は気付きにくいかも?

したがって、 $10^{0.475} < 3 < 10^{0.48}$ なのて、

$3 = 10^{0.47...}$

$(y = 0.47...)$

$4 = 10^z$ とする z は?

$2 = 10^x$ より、 $4 = 2^2 = (10^x)^2 = 10^{2x}$ なのて、

$z = 2x = 0.3 \square \dots$
 ↑

0 か 1 か 分かったんだけど、
 まあ、 $z = 2x$ なのて 十分分かった気分!

$2 = 10^{0.30...}$
 $3 = 10^{0.47...}$
 $4 = 10^{0.6 \square \dots}$
 $5 = 10^{0.69...}$

$5 = 10^w$ となる w は?

$2 \cdot 5 = 10$ なのて

$$10^x \cdot 5 = 10^1 \quad \therefore 5 = \frac{10^1}{10^x} = 10^{1-x}$$

$x = 0.30 \dots$ なのて $1-x = 0.69 \dots$

よて $w = 0.69 \dots$ て $5 = 10^{0.69 \dots}$

さらに

$$250 = \frac{1000}{4}$$

と同じ $5 = \frac{10}{2}$ の変形だ!

$6 = 10^a$ となる a は?

$$6 = 2 \cdot 3 \text{ なのて } 6 = 10^x \cdot 10^y = 10^{x+y}$$

したがて

$$a = x+y = 0.30 \dots + 0.47 \dots = 0.77 \dots$$

↑

7と8が分かるな、けど

$a = x+y$ なのて (笑)

$7 = 10^b$ となる b は?

また出てきたぞ!

$$7^2 = 49 < 50 = \frac{100}{2} < \frac{10^2}{10^{0.3}} = 10^{1.7}$$

$$\therefore 7 < 10^{\frac{1.7}{2}} = 10^{0.85}$$

$$7^3 = 343 > \frac{1000}{3} = \frac{10^3}{3}$$

またこれだ!

$$\therefore 3 < 10^{0.48} \text{ かつ } \frac{1}{3} > \frac{1}{10^{0.48}} \text{ なのて}$$

$$7^3 > \frac{10^3}{3} > \frac{10^3}{10^{0.48}} = 10^{2.52} \quad \therefore 7 > 10^{\frac{2.52}{3}} = 10^{0.84}$$

したがて $10^{0.84} < 7 < 10^{0.85}$ なのて

$$7 = 10^{0.84 \dots}$$

($b = 0.84 \dots$)

と分かる

$8 = 10^c$ となる c は?

$$8 = 2^3 = (10^x)^3 = 10^{3x}$$

$$\therefore c = 3x = 3 \times 0.30 = 0.9 \dots$$

↑

0 or 1 or 2

$9 = 10^d$ となる d は?

$$9 = 3^2 = (10^y)^2 = 10^{2y}$$

4 or 5

$$\therefore d = 2y = 2 \times 0.47 \dots = 0.94 \dots$$

問題 2-1

10^x	1	2	3	4	5	6	7	8
x	0	0.30103	0.47712	0.60206	0.69897	0.77815	0.84510	0.90309
				"		"		"
				0.30103×2		$0.30103 + 0.47712$	9	0.30103×3
				$\therefore 4 = 2^2$		$\therefore 6 = 2 \times 3$		$\therefore 8 = 2^3$
				$= (10^{0.30103})^2$				
							0.95424	
							"	

$$5 = \frac{10}{2} = \frac{10^1}{10^{0.30103}}$$

$$= 10^{1-0.30103}$$

$$0.47712 \times 2$$

$$\therefore 9 = 3^2$$

ここまて桁数があれば

昨日の 2^{100}

$$2^{100} = (10^{0.30103})^{100} = 10^{30.103}$$

$$= 10^{30+0.103} = 10^{30} \cdot 10^{0.103}$$

昨日はここまては見えてた!

$$\therefore 10^0 < 10^{0.103} < 10^{0.30103} \quad \therefore 1 < 10^{0.103} < 2 \text{ なのて}$$

$$10^{0.103} = 1. \text{xxx} \dots$$

よて

$$2^{100} = 10^{30} \cdot 1. \text{xxx} \dots \text{ は } 31 \text{ 桁で 首位は } 1 \text{ と分かる}$$

$$(2) 5^{100} = (10^{0.69897})^{100} = 10^{69.897} = 10^{69+0.897} = 10^{69} \cdot 10^{0.897}$$

ここで、 $10^{0.84510} < 10^{0.897} < 10^{0.90307} \therefore 7 < 10^{0.897} < 8$ なのて、

$$5^{100} = 10^{69} \cdot 7.x \times x$$

これは70桁の数で 首位の数は7

(3) 「はじめて 2020 桁を超える」は
桁数が 2020 桁を超えると 解釈することにした...

2^n が 2020 桁を超えるのは、

$$2^n \geq 10^{2020}$$

となるとき、 $2^n = (10^{0.30103})^n = 10^{0.30103n}$ なのて、

$$10^{0.30103n} \geq 10^{2020} \therefore 0.30103n \geq 2020$$

$$\therefore n \geq \frac{2020}{0.30103} = 6710.29 \dots$$

これをみたす最小の自然数 n は 6711

(4) $2^n = (10^{0.30103})^n = 10^{0.30103n}$ の首位の数は、0.30103の
小数部分で決まる

首位の数ははじめて7になるのは、0.30103 n の小数部分が

電卓で $0.84510 \leq x < 0.90309$ の範囲に入るときだから
 $0.30103n$ を計算する

$$13.84738 = 0.30103 \times 46 \text{ がみつかると } \therefore 46 \text{ 乗}$$

スキャンレない

$$(205) (1) 12^{100} = (2 \cdot 2 \cdot 3)^{100} = 10^{0.30103 + 0.30103 + 0.47712}$$

$$= (10^{1.07918})^{100}$$

$$= 10^{107.918}$$

桁数) 108 首位) 8

$$(2) 10^{30.103} \times (10^{0.47712})^{100} \times (10^{0.84510})^{200}$$

$$= 10^{30.103 + 71.568 + 169.020}$$

$$= 10^{270.691}$$

桁数) ~~271~~ 首位) ~~4~~

$$(3) 1.4^{100} = 1.4 = 7.2 \cdot 10^{-1}$$

$$= 10^{0.84510 + 0.30103 - 1}$$

$$= (10^{0.14613})^{100}$$

$$= 10^{14.613}$$

首位) 4

$$(4) \left(\frac{1}{3}\right)^{100} = (3^{-1})^{100} = (10^{-0.47712})^{100} = 10^{-47.712}$$

$$(5) \left(\frac{5}{12}\right)^{100} = \left(\frac{5}{10 \cdot 1.07918}\right)^{100} = (10^{0.69897 - 1.07918})^{100}$$

$$= (10^{-0.38021})^{100}$$

$$= 10^{-38.021}$$

$$= 10^{-39} \cdot 10^{0.979}$$

小数39位に9が現れる

⑤ (205)

$$(1) 12 = 2^2 \cdot 3 = (10^{0.30103})^2 \cdot 10^{0.47712} \\ = 10^{0.60206} \cdot 10^{0.47712} = 10^{1.07918} \quad \text{なので、}$$

$$12^{100} = (10^{1.07918})^{100} = 10^{107.918} = 10^{107} \cdot 10^{0.918}$$

1のあとに0が107コの
10.8桁

$$\text{ここで、} 8 = 10^{0.90309} < 10^{0.918} < 10^{0.95424} = 9$$

$$\text{なので、} 10^{0.918} = 8.x \times x \dots$$

だから、 12^{100} は 10.8桁、首位の数は8

(2) 271桁 4

$$(3) 1.4 = \frac{14}{10} = \frac{2 \cdot 7}{10} = \frac{10^{0.30103} \cdot 10^{0.84510}}{10^1} = 10^{0.14613}$$

$$\text{なので、} 1.4^{100} = 10^{14.613} = 10^{14} \cdot 10^{0.613} \quad \text{であって、}$$

$$4 = 10^{0.60206} < 10^{0.613} < 10^{0.69897} \quad \text{なので、}$$

首位の数は 4

$$(4) \frac{1}{3} = 3^{-1} = (10^{0.47712})^{-1} = 10^{-0.47712} \quad \text{なので、}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{100} = 10^{-47.712} = 10^{-48} \cdot 10^{0.288}$$

$$= 10^{-48+0.288} = 10^{-48} \cdot 10^{0.288}$$

$$\text{ここで、} 1 = 10^0 < 10^{0.288} < 10^{0.30103} = 2 \quad \text{なので、}$$

$$10^{0.288} = 1.x \times x \dots \quad \text{よって、}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{100} = 10^{-48} \cdot 1.x \times x \dots \quad \text{なので、}$$

0.00...01
↑
第48位

これは、小数第48位に始めて0でない数1が表われる

$$10^{-1} = 0.1$$

$$10^{-2} = 0.01$$

$$10^{-3} = 0.001$$

小数第n位

$$10^{-n} = 0.00 \dots 01$$

0がnコ

$$(5) (1) \text{より、} 12 = 10^{1.07918} \quad \text{なので、}$$

$$\frac{5}{12} = \frac{10^{0.69897}}{10^{1.07918}} = 10^{-0.38021}$$

$$\text{よって、} \left(\frac{5}{12}\right)^{100} = 10^{-38.021} = 10^{-39+0.979} \\ = 10^{-39} \cdot 10^{0.979}$$

$$\text{ここで、} 9 = 10^{0.95424} < 10^{0.979} < 10^1 = 10 \quad \text{なので、}$$

$$\left(\frac{5}{12}\right)^{100} = 10^{-39} \cdot 9.x \times x \dots$$

これは、小数第39位に、始めて0でない数9があらわれる

おまけ 上2桁は...? → テキスト チャレンジ発展 2-4

へきの話はこれでおしまい... 10^x しか扱ってないのに、
本当にこれでおしまいなの?

例 $2^x = 3$ となる x は?

よく知っている 10 のべきで表してみれば、

$$(10^{0.30103})^x = 10^{0.47712}$$

$$10^{0.30103x} = 10^{0.47712}$$

なので、

$$0.30103x = 0.47712$$

$$x = \frac{0.47712}{0.30103} = 1.584958$$

同様にすれば、 10^x をよく知っていると、

他の底のべきのことも分かる!

(おまけ) (503)

(1) 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096,

8192, 16384, 32768, 65536, 131072, 262144, ...

... 4桁 1024, 5桁 16384, 6桁 131072

(2) 2の累乗数で首位の数が1で、77桁のものはあるか?

あるんじゃないの...?

$2^1, 2^2, 2^3, \dots$ ではじめてくりあがって桁が77桁になった数の首位の数は1でしょ?

... をきちんと言えば説明になりそうだけど、

桁数とか首位の数とか言っているので、

今日のテクニックで説明してみよう!

自然数 n に対して、 $2^n = 10^{0.30103n}$ の桁数は

$0.30103n$ の整数部分で決まり、 $76 \leq 0.30103n < 77$

となるとき、 2^n は 77桁になるのだ。

$0.30103n$ が 76以上になる最小の n を N とおくと、

$$0.30103(N-1) < 76 \leq 0.30103N$$

$$\therefore 76 \leq 0.30103N < 76 + 0.30103$$

したがって

$$10^{76} \leq 10^{0.30103N} < 10^{76+0.30103} = 10^{76} \cdot 2$$

2^N

であり、 2^N は 77桁で首位の数が1の数である

(3) 同様にして、2の累乗で任意の桁数の首位の数が1のもの
が存在して、もちろんそれはただひとつなので

$$2^0 = 1, 2^1, 2^2, \dots, 2^{2019}$$

のうち、首位の数が1となるものの数は 2^{2019} の桁数に等しい

$$2^{2019} = 10^{0.30103 \cdot 2019} = 10^{607.77957} \text{ は } \boxed{608 \text{ 桁}} \text{ なので、 } \boxed{608 \text{ 個}}$$

面白いのはこの続き! ぜひ(H.5.3)も考えてみよう!

問題 2-1

$2=10^{0.30102999\cdots}$, $3=10^{0.47712125\cdots}$, $7=10^{0.84509804\cdots}$

であることが知られている。指数の小数第6位を四捨五入して

$2=10^{0.30103}$, $3=10^{0.47712}$, $7=10^{0.84510}$

と考えることにして、以下の問に答えなさい。

(1) 次の表を埋めなさい。

10^x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x		0.30103	0.47712				0.84510		

(2) 5^{100} の桁数と、首位の数を求めなさい。

(3) 2の累乗がはじめて2020桁を超えるのは、2を何乗したときか、またそのときの首位の数はいくつか。

■ 誤差が気になるだろうが、 $2=10^{0.30103}$ として計算してよい。

(4) 2の累乗の首位の数がはじめて7になるのは、2を何乗したときか。

■ 命数法

大数		小数	
十	10^1	一	
百	10^2	分 (ぶ)	10^{-1}
千	10^3	厘 (りん)	10^{-2}
万	10^4	毛 (もう)	10^{-3}
億	10^8	糸 (し)	10^{-4}
兆	10^{12}	忽 (こつ)	10^{-5}
京 (けい)	10^{16}	微 (び)	10^{-6}
垓 (がい)	10^{20}	纖 (せん)	10^{-7}
秭 (じょ)	10^{24}	沙 (しゃ)	10^{-8}
穰 (じょう)	10^{28}	塵 (じん)	10^{-9}
溝 (こう)	10^{32}	埃 (あい)	10^{-10}
澗 (かん)	10^{36}	渺 (びょう)	10^{-11}
正 (せい)	10^{40}	漠 (ばく)	10^{-12}
載 (さい)	10^{44}	模糊 (もこ)	10^{-13}
極 (ごく)	10^{48}	逡巡 (しゅんじゅん)	10^{-14}
恒河沙 (ごうがしゃ)	10^{52}	須臾 (しゅゆ)	10^{-15}
阿僧祇 (あそうぎ)	10^{56}	瞬息 (しゅんそく)	10^{-16}
那由他 (なゆた)	10^{60}	彈指 (だんし)	10^{-17}
不可思議 (ふかしぎ)	10^{64}	刹那 (せつな)	10^{-18}
無量大数 (むりょうたいすう)	10^{68}	六德 (りっとく)	10^{-19}
		虚空 (こくう)	10^{-20}
		清浄 (しょうじょう)	10^{-21}

■ 野球で「打率2割3分4厘」などということがあるが、「3分」「4厘」はそれぞれ「0.3割」「0.04割」を表しているのであって、「割」が 10^{-1} 、「分」が 10^{-2} 、厘が 10^{-3} を意味しているわけではない (大変紛らわしい)。

■ 仏教用語が多いので、単語の意味を調べてみると楽しい。

高1 春期 指数・対数関数 宿題-2

※ 明日解答を配布します。

宿題 2-1

- (1) $2^{-\frac{1}{6}} \cdot 12^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{\frac{1}{3}}$ を簡単にしなさい。
- (2) $512^x = 32$ を満たす x を求めなさい。
- (3) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[3]{8}$ を簡単にしなさい。

宿題 2-2

$2^{10} \approx 10^3$ としてざっくりと概算すると、 $2^{100} \approx 10^{30}$ となる。 2^{100} は 31 桁の自然数であり、首位の数は 1 であるから、この概算で、桁数も首位の数も正確に求まっていることになる。

同じように、 $2^{10} \approx 10^3$ として、 2^{10n} を $2^{10n} \approx 10^{3n}$ と概算したとき、

- (1) 桁数が不正確になる最小の自然数 n を求めなさい。
- (2) 首位の数が不正確になる最小の自然数 n を求めなさい。

ただし、解答に際しては、 $2 = 10^{0.30103}$ として計算してよい。

宿題 2-3

$2 = 10^{0.30103}$, $3 = 10^{0.47712}$, $7 = 10^{0.84510}$ であるとする。

- (1) 次の表を完成させなさい。

10^x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x		0.30103	0.47712				0.84510		

以下の問で現れる分数については、一切約分をせずに答えなさい。

- (2) $2^a = 3$ となる a を求めなさい。
- (3) 次の表を完成させなさい。

2^x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x									

以下、空欄を適切に埋めなさい。

- (4) $2^c = 10^b$ となる c を、 b を用いて表すと、 $c = \frac{b}{\quad}$ である。

- (5) したがって、 $y = 2^x$ のグラフは、 $y = 10^x$ のグラフを、

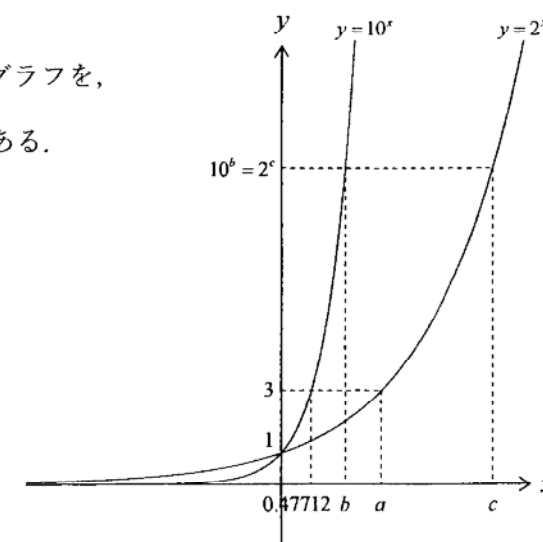
方向に 倍に拡大したものである。

- (6) 同様に考えれば、 $y = 3^x$ のグラフは、 $y = 10^x$ のグラフを、

方向に 倍に拡大したものであると分かる。

- (7) (5), (6) より、 $y = 3^x$ のグラフは、 $y = 2^x$ のグラフを、

方向に 倍に拡大したものである。



宿題 1-1

$$(1) 9^{\frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{1}{2}} = 3^{2 \cdot \frac{1}{2}} = \boxed{3}$$

$$(2) 8^{-\frac{2}{3}} = (2^3)^{-\frac{2}{3}} = 2^{3 \cdot (-\frac{2}{3})} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$(3) 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 5^1 = \boxed{5}$$

$$(4) \frac{2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{5}{12}}} = 2^{\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{12}} = 2^{\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{12}} = 2^1 = \boxed{2}$$

$$(5) \frac{16^{\frac{7}{6}} \cdot 16^{\frac{5}{4}} \cdot 16^{-\frac{3}{2}}}{16^{-\frac{2}{3}}} = 16^{-\frac{7}{6} - \frac{5}{4} - \frac{3}{2} - (-\frac{2}{3})} = 16^{-\frac{7}{6} - \frac{5}{4} - \frac{3}{2} + \frac{2}{3}} = 16^{-\frac{3}{4}} = (2^4)^{-\frac{3}{4}} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

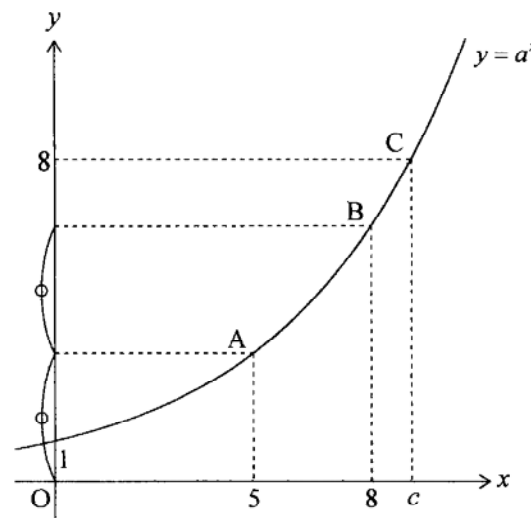
宿題 1-2

$$(1) a\sqrt{a} = a \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{1+\frac{1}{2}} = \boxed{a^{\frac{3}{2}}}$$

$$(2) \sqrt{a\sqrt{a}} = \sqrt{a^{\frac{3}{2}}} = (a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \boxed{a^{\frac{3}{4}}}$$

$$(3) \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}} = \sqrt{a\sqrt{a \cdot a^{\frac{3}{4}}}} = \sqrt{a\sqrt{a^{\frac{7}{4}}}} = \sqrt{a \cdot a^{\frac{7}{8}}} = \sqrt{a^{\frac{15}{8}}} = (a^{\frac{15}{8}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{15}{8} \cdot \frac{1}{2}} = \boxed{a^{\frac{15}{16}}}$$

宿題 1-3



B の y 座標は A の y 座標の 2 倍なので、

$$a^8 = 2a^5$$

$a > 0$ より、

$$a^3 = 2 \quad \therefore a = 2^{\frac{1}{3}}$$

したがって、C の座標より

$$8 = (2^{\frac{1}{3}})^c \quad \therefore 2^3 = 2^{\frac{1}{3}c}$$

であるから、 $3 = \frac{1}{3}c \quad \therefore c = \boxed{9}$

■ $a^3 = 2$ から、 $8 = 2^3 = (a^3)^3 = a^9 \quad \therefore c = \boxed{9}$ としてもよい。

宿題 1-4#

2 を 10 のべきで表すと

$$2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3 \quad \therefore 2 > 10^{\frac{3}{10}}$$

$$2^{13} = 8192 < 10000 = 10^4 \quad \therefore 2 < 10^{\frac{4}{13}}$$

したがって、

$$10^{0.3} < 2 < 10^{0.307\ldots} \quad \therefore \boxed{2 = 10^{0.30\ldots}}$$

3 を 10 のべきで表すと

$$3^4 = 81 > 80 = 2^3 \cdot 10 > (10^{0.3})^3 \cdot 10 = 10^{1.9}$$

$$\therefore 3 > 10^{\frac{1.9}{4}} = 10^{0.475}$$

$2 > 10^{0.3}$ より $\frac{1}{2} < \frac{1}{10^{0.3}}$ であるから、

$$3^5 = 243 < 250 = \frac{10^3}{2^2} < \frac{10^3}{(10^{0.3})^2} = 10^{2.4}$$

$$\therefore 3 < 10^{\frac{2.4}{5}} = 10^{0.48}$$

したがって、

$$10^{0.475} < 3 < 10^{0.48} \quad \therefore \boxed{3 = 10^{0.47\ldots}}$$

7 を 10 のべきで表すと

$2 > 10^{0.3}$ より $\frac{1}{2} < \frac{1}{10^{0.3}}$ であるから、

$$7^2 = 49 < 50 = \frac{10^2}{2} < \frac{10^2}{10^{0.3}} = 10^{1.7}$$

$$\therefore 7 < 10^{\frac{1.7}{2}} = 10^{0.85}$$

$3 < 10^{0.48}$ より $\frac{1}{3} > \frac{1}{10^{0.48}}$ であるから、

$$7^3 = 343 > \frac{10^3}{3} > \frac{10^3}{10^{0.48}} = 10^{2.52}$$

$$\therefore 7 > 10^{\frac{2.52}{3}} = 10^{0.84}$$

したがって、

$$10^{0.84} < 7 < 10^{0.85} \quad \therefore \boxed{7 = 10^{0.84\ldots}}$$

■ この手計算可能な美しい一連の評価式は、みなさんの先輩がかつて宿題の解答として提出してくれたものです。

3日目

$$\begin{array}{r} 18 \\ 16 \\ \hline 2 \\ 96 \\ 18 \\ \hline 254 \end{array}$$

$$H2-1 (1) 2^{-\frac{1}{2}} = (2^{\frac{1}{2}})^{-1} = 3^{\frac{1}{2}} = (3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{2}$$

$$(2) 512 = 256$$

§3 対数

$2 = 10^x$ とする x のような数を 扱ってきたが、これに記号をつける

○ 正の数 a に対して $a \neq 1$ (1 は何乗しても 1)

$$a^x = y$$

の時、この x を $x = \log_a y$ と表して

整数 y の a を底とする対数とする。

$$(例) 2^3 = 8 \iff \log_2 8 = 3$$

$$2 = 10^{0.30103} \iff \log_{10} 2 = 0.30103$$

$$\log_a y$$

何乗かを表す

ビークライトの話に戻れば、

毎秒 a 倍のライトを何秒あてると y 倍になるか

(30.1)

$$(2) (i) \log_2 4 = 2 \quad (ii) \log_2 1 = 0 \quad (iii) \log_2 0 \quad \text{X} \quad \text{Xは存在しない}$$

$$(iv) \log_2 \frac{1}{2} = -1 \quad (v) \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2} \quad (vi) \log_2 \frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{3}{2}$$

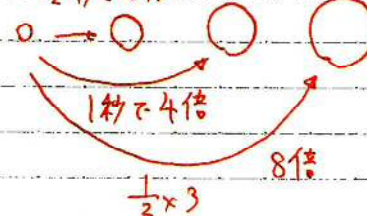
$$(vii) \log_2 (-1) = \text{X} \quad (viii) \log_4 8 = \frac{3}{2} \quad (ix) \log_{\frac{1}{8}} 2 = -\frac{1}{3}$$

$$(x) \log_{-3} 3 \quad \text{X} \quad \text{(iii)と同様}$$

$$(2^{-3})^x = 2^1 \\ x = -\frac{1}{3}$$

-3 のべきは考えられぬ
(毎秒大々大
-3 倍はなし)

$\frac{1}{2}$ 秒で 2 倍



※ 4 も 8 も 2 の累乗であることに注目して

$$\log_4 8 = \log_2 2^3 = \frac{3}{2}$$

$$(2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3$$

解答

$$(1) (i) \log_6 9 + \log_6 4 = \log_6 36 = 2$$

$$(ii) \log_3 108 - \log_3 4 = \log_3 27 = 3$$

$$(iii) \log_5 5\sqrt{5} = \frac{3}{2}$$

$$(iv) 7^{\log_7 10} = \log_7 10^7$$

対数の計算規則

...は昨日までの指数規則でわかる!

$$\textcircled{例} \quad b = 2.3 = 10^{0.30103} \cdot 10^{0.47712} \\ = 10^{0.77815}$$

$\log_{10}$
で表すと

$$\log_{10} b = \log_{10} 2 + \log_{10} 3$$

これを一般化すると

$$a > 0 \text{ として } X = a^x \quad Y = a^y \text{ のとき}$$

$$XY = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

両辺の?

$$\log_a (XY) = x + y = \log_a X + \log_a Y$$

他の指数規則についても...

$$\therefore 50 = \frac{100}{2} = \frac{10^2}{10^{0.30103}} = 10^{2-0.30103} = 10^{1.69897}$$

$$\log_{10} 50 = \log_{10} 100 - \log_{10} 2$$

一般に $a > 0$, $X = a^x$, $Y = a^y$ のとき

$$\frac{X}{Y} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad \text{両辺の?}$$

$$\log_a \frac{x}{y} = x - y = \log_a x - \log_a y$$

$$2^{100} = (10^{0.30103})^{100} = 10^{30.103}$$

$$\log_{10} 2^{100} = (\log_{10} 2) \cdot 100$$

一般に $a > 0$, $x = a^x$ のとき

$$x^y = (a^x)^y = a^{x \cdot y} \quad \text{のとき}$$

$$\log_a x^y = (\log_a x) \cdot y$$

まとめ

正の整数 $a (\neq 1)$, x, y に対して

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

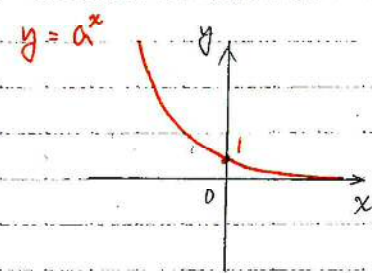
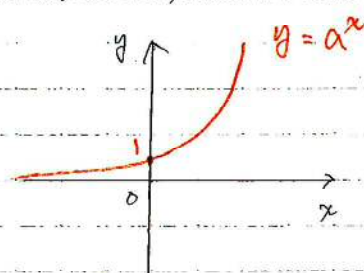
$$\log_a x^y = y \log_a x$$

この指数法則の言い換えを対数法則という

図 $y = a^x$ ($a > 1, a \neq 1$) のグラフは

$a > 1$ のときは

$a < 1$ のときは



のようになるので、 $y = a^x$ の値域は $y > 0$ となる

(つまり、どんな正の数 x に対しても、 $x = a^x$ となる x が存在する)

例 (3.03) (3)

$$(i) \log_6 2 + \log_6 18 = \log_6 (2 \cdot 18) = \log_6 36 = \boxed{2}$$

$$(ii) \log_6 18 - \log_6 2 = \log_6 \frac{18}{2} = \log_6 9$$

$$(iii) \log_6 (\sqrt{2}+1) - \log_6 (\sqrt{2}-1) = \log_6 \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \log_6 (\sqrt{2}+1)^2$$

$$= \log_6 (3+2\sqrt{2})$$

であるけれど、これは

$$\boxed{2 \log_6 (\sqrt{2}+1)} \text{ の方がよいだろう!}$$

そんなこと言ってる、これも $= \log_6 3^2$

$$= \boxed{2 \log_6 3}$$

なんて表せるぞ!

$$(iv) 3 \log_6 \sqrt[3]{5} = 3 \log_6 5^{\frac{1}{3}} = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \log_6 5 = \boxed{\log_6 5}$$

(305)

$$(1) (i) \log_6 9 + \log_6 4 = \log_6 36 = \boxed{2}$$

$$(ii) \log_3 108 - \log_3 4 = \log_3 27 = \boxed{3}$$

$$(iii) \log_5 5\sqrt{5} = \log_5 5 + \log_5 \sqrt{5} = 1 + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$(iv) 7^{\log_7 10} = ?$$

$\log_7 10$ は 「7 を $\log_7 10$ 乗したと 10 になる」 ような数
なので、

($7^x = 10$ とする x を $\log_7 10$ と書いたのだから)

えええん $7^{\log_7 10} = \boxed{10}$

($\sqrt{2}$ の 2 乗が 2 と同じレベルの話だぞ!)

$$(2) (i) \log_{27} 247 = \log_{3^3} 3^5 = \boxed{\frac{5}{3}}$$

$\frac{5}{3}$ 乗だ

$$(ii) \frac{\log_3 8}{\log_3 2} = \left\{ \begin{array}{l} \log_3 \frac{8}{2} \\ \log_3 (8-2) \end{array} \right. \quad \text{XXX}$$

$$\textcircled{\text{F}} \log_3 8 - \log_3 2 = \log_3 \frac{8}{2}$$

$$\frac{\log_3 8}{\log_3 2} = \frac{\log_3 2^3}{\log_3 2} = \frac{3 \log_3 2}{\log_3 2} = \boxed{3}$$

$$(iii) 3^{\log_9 10} = ? \quad 9^{\log_9 10} = 10 \text{ だね...}$$

$$(3^2)^{\log_9 10} = 10 \quad 3^{2 \log_9 10} = 10$$

$$(3^{\log_9 10})^2 = 10$$

$$3^{\log_9 10} > 0 \text{ なのだから } 3^{\log_9 10} = \boxed{\sqrt{10}}$$

$$(3) a = \log_2 3, \quad b = \log_2 5$$

$$(i) \log_2 45 = \log_2 (3^2 \cdot 5) = \log_2 3^2 + \log_2 5 = 2 \log_2 3 + \log_2 5 = 2a + b$$

$$(ii) \log_2 100 = \log_2 10^2 = 2 \log_2 10$$

$$= 2 \log_2 (2 \cdot 5) = 2 (\log_2 2 + \log_2 5)$$

$$= 2(1 + b) = \boxed{2 + 2b}$$

$$(iii) \log_4 15 = ? \quad \log_2 15 = \log_2 (3 \cdot 5) = \log_2 3 + \log_2 5 = a + b$$

はすぐに分かるのだから...

あれ? それなら $4 = 2^2, 15 = 2^{a+b}$ なんだから、

$$\log_4 15 = \log_{2^2} 2^{a+b} = \boxed{\frac{a+b}{2}} \quad (\text{さっきの } \log_4 8 \text{ の } 7 \text{ じゃない!})$$

$$(iv) \log_3 5 = \log_{2^a} 2^b = \boxed{\frac{b}{a}}$$

(v) $\log_{10} 81$ どうやう底も真数も2のべきにしてみよう
片付きそうだな!

10は2の何べき? $\log_2 10 = \log_2 2 + \log_2 5 = 1 + b$

8は2の何べき? $\log_2 81 = \log_2 3^4 = 4 \log_2 3 = 4a$

$\therefore \log_{10} 81 = \log_2 81 \cdot 2^{-\log_2 10} = \frac{4a}{1+b}$ (11)

つまり $\log_{10} 81$ は「2を底とする対数」に変換するには

$\log_{10} 81 = \log_2 81 \cdot 2^{-\log_2 10} = \frac{\log_2 81}{\log_2 10}$
何乗?

という計算をしている

一般に底 a の対数も c を底とする対数に直したいなら

$$\log_a b = \log_c b \cdot \log_a c = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

底変換の公式

$(a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1)$

(vi) 底変換の公式を意識して使おう

$$\log_{\sqrt{15}} \sqrt{10} = \frac{\log_2 \sqrt{10}}{\log_2 \sqrt{15}}$$

$$\log_2 \sqrt{10} = \frac{1}{2} \log_2 10 = \frac{1}{2} (\log_2 2 + \log_2 5) = \frac{1}{2} (1 + b)$$

$$\log_2 \sqrt{15} = \frac{1}{2} \log_2 15 = \frac{1}{2} (\log_2 3 + \log_2 5) = \frac{1}{2} (a + b)$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{2}(1+b)}{\frac{1}{2}(a+b)} = \frac{1+b}{a+b}$$

確認 (iii), (iv) を

「底変換の公式」を使おう

(おまけ) (2) (iii) $3^{\log_9 10} = ?$

$\log_9 10$ 乗して3が何になるかを知りたいので、
底を3に変換して

$$\log_9 10 = \frac{\log_3 10}{\log_3 9} = \frac{\log_3 10}{2} = \frac{1}{2} \cdot \log_3 10^{\frac{1}{2}} = \log_3 \sqrt{10}$$

$$\therefore 3^{\log_9 10} = 3^{\log_3 \sqrt{10}} = \sqrt{10} \quad \dots \text{と考えることもできる}$$

(307)

(1) n 回すべて 1 の目が出る確率は $(\frac{1}{6})^n$

これが $\frac{1}{10^8}$ を下回るのは、 n が $\frac{1}{10^8} = 0.\overbrace{0000000}^{72}1$

$$(\frac{1}{6})^n < \frac{1}{10^8}$$

をみたすとき

対数を取れば
 n の 1 次不等式に!

小数点以下 8 桁目までは 0
と考えれば、昨日の計の続き!

$(\frac{1}{6})^n$ を 10 を底として考えれば分かる!

今日の言葉で言えば、

両辺の対数で比べるのだ

両辺の 10 を底とする対数を取って、

「 $\log_{10}$ を取って」

$$\log_{10} (\frac{1}{6})^n < \log_{10} \frac{1}{10^8} \quad (\because y = \log_{10} x \text{ は増加関数なので})$$

$$n \cdot \underbrace{\log_{10} \frac{1}{6}}_{\text{数}} < \underbrace{\log_{10} \frac{1}{10^8}}_{\text{数}}$$

なので、これを解けばよい

$$\log_{10} \frac{1}{6} = \log_{10} 1 - \log_{10} 6$$

$$= 0 - (\log_{10} 2 + \log_{10} 3)$$

$$= -0.77815$$

$$\log_{10} \frac{1}{10^8} = -8$$

なので、

$$-0.77815n < -8$$

$$\therefore n > \frac{8}{0.77815} = 10.2\dots$$

よって、 n が 11 以上のとき

④ $(\frac{1}{6})^n < \frac{1}{10^8}$ となる n の範囲をきかれているのだから、
両辺の $\frac{1}{6}$ を底とする対数を取るのが自然な発想!

$y = \log_{\frac{1}{6}} x$ は 減小関数 なのだ。

$$\log_{\frac{1}{6}} (\frac{1}{6})^n > \log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{10^8}$$

$$n > \log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{10^8}$$

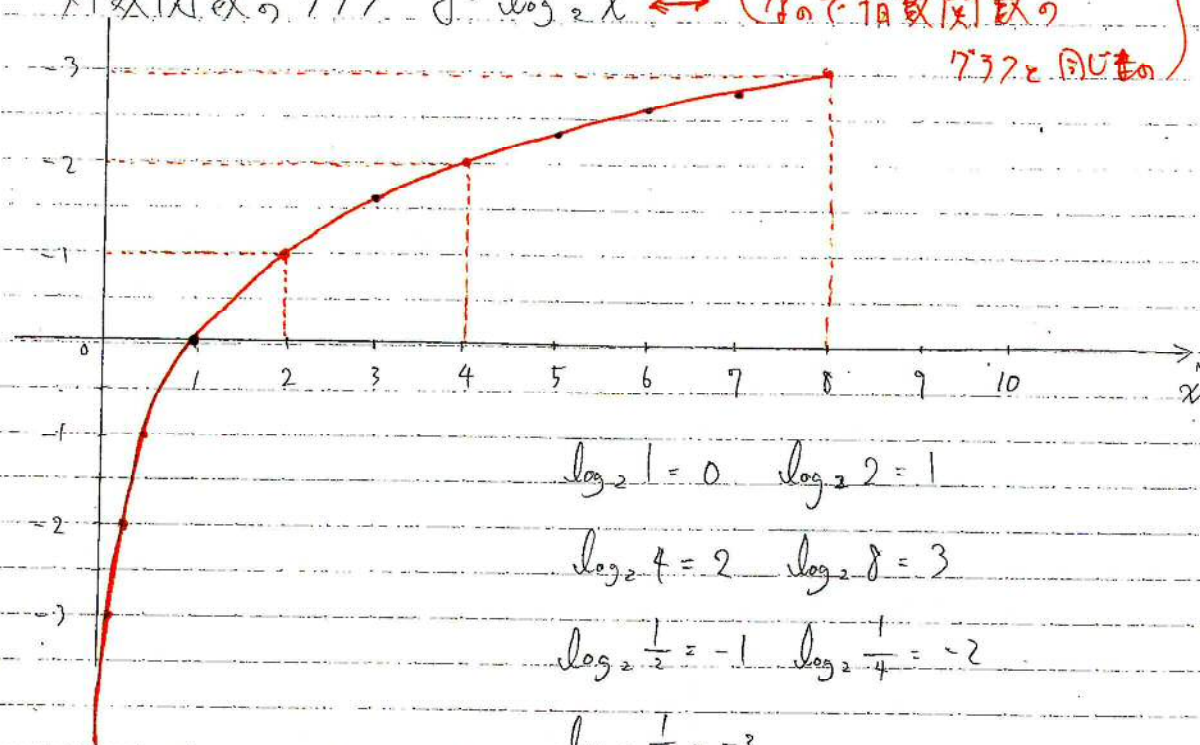
あとは、この対数を実算すればよい

$$\log_{\frac{1}{6}} 10^{-8} = \frac{\log_{10} 10^{-8}}{\log_{10} \frac{1}{6}} = \frac{-8}{-\log_{10} 6} = \frac{8}{\log_{10} 6} \quad \text{あとはさきと同じで、}$$
$$= \frac{8}{0.77815} = 10.2\dots$$

結局底変換したので、
はじめから $\log_{10}$ を取った方が
楽かも? $\therefore n > 10.2\dots$

(2) 各自やってみよう!

対数関数のグラフ $y = \log_2 x \leftrightarrow \begin{cases} 2^y = x \\ \text{左の指数関数の} \\ \text{グラフと同じもの} \end{cases}$



$$\log_2 1 = 0 \quad \log_2 2 = 1$$

$$\log_2 4 = 2 \quad \log_2 8 = 3$$

$$\log_2 \frac{1}{2} = -1 \quad \log_2 \frac{1}{4} = -2$$

$$\log_2 \frac{1}{8} = -3$$

$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} = \frac{0.48}{0.30} = 1.6$$

$$\log_2 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} = \frac{0.70}{0.30} = 2.33 \dots$$

底変換値を調べた!

$$\log_2 6 = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + 1.6 = 2.6$$

$$\log_2 7 = \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 2} = \frac{0.85}{0.30} = 2.8 \dots$$

宿題 3-1

簡単にしなさい。

- (1) $\log_7 4 + \log_7 3$ (2) $\log_7 14 - \log_7 2$ (3) $\log_7 8 - \log_7 1$
 (4) $\log_8 2$ (5) $\log_{16} \frac{1}{8}$

宿題 3-2

$\log_{10} 2 = 0.30103$, $\log_{10} 3 = 0.47712$, $\log_{10} 7 = 0.84510$ とする。

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\log_{10} x$		0.30103	0.47712				0.84510		

- (1) $\log_{10} 18$ の値を求めなさい。
 (2) 18^{50} の桁数と首位の数を求めなさい。
 (3) $\log_{10} 0.9$ の値を求めなさい。
 (4) 0.9^{100} は小数第何位にはじめて 0 でない数が現れるか。またその数は何か。

宿題 3-3

新規 SSR の排出率が 2% のガチャがある。少なくとも 1 回新規 SSR を引く確率がはじめて 98% 以上になるのは、くじを何回引いたときか求めなさい。

ただし、 $\log_{10} 2 = 0.30103$, $\log_{10} 3 = 0.47712$, $\log_{10} 7 = 0.84510$ としてよい。

■ 問題文は「あたりの出る確率が 2% のくじで、少なくとも 1 回あたりを引く確率がはじめて 98% 以上になるのは、くじを何回引いたときか求めなさい」という意味です。

宿題 2-1

$$\begin{aligned}
 (1) \quad 2^{-\frac{1}{6}} \cdot 12^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{\frac{1}{3}} &= 2^{-\frac{1}{6}} \cdot (2^2 \cdot 3)^{\frac{1}{3}} \cdot (3^2)^{\frac{1}{3}} \\
 &= 2^{-\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 2^{-\frac{1}{6} + \frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} \\
 &= 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^1 = \sqrt{2} \cdot 3 = \boxed{3\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad 512^x = 32 \quad \therefore 2^{9x} = 2^5 \text{ となるのは,}$$

$$9x = 5 \quad \therefore x = \boxed{\frac{5}{9}}$$

のとき.

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[5]{8} &= 2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{5}} \\
 &= 2^{\frac{1}{3}} \cdot (2^2)^{\frac{1}{4}} \cdot (2^3)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{5}} \\
 &= 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{5}} = 2^{\frac{1+2+3}{3}} = 2^1 = \boxed{2}
 \end{aligned}$$

宿題 2-2

$$2^{10} = (10^{0.30103})^{10} = 10^{0.30103 \cdot 10} = 10^{3.0103}$$

なので,

$$\begin{aligned}
 2^{10n} &= (2^{10})^n = (10^{3.0103})^n = 10^{3.0103n} \\
 &= 10^{(3+0.0103)n} = 10^{3n+0.0103n} \\
 &= \underbrace{10^{3n}}_{3n+1 \text{ 桁}} \cdot 10^{0.0103n}
 \end{aligned}$$

である.

これを $2^{10} \approx 10^3$ として概算すると,

$$2^{10n} \approx \underbrace{10^{3n}}_{3n+1 \text{ 桁}}$$

となる.

したがって,

$$(1) \quad 1 \leq 10^{0.0103n} < 10 \text{ のときは桁数が正確で,}$$

$$\begin{aligned}
 10^{0.0103n} &\geq 10 \\
 0.0103n &\geq 1
 \end{aligned}$$

$$\therefore n \geq \frac{1}{0.0103} = 97.08 \dots$$

のとき不正確になる.

したがって, はじめて桁数が不正確になるのは, $n = \boxed{98}$ のときである.

(2) n が小さいうちは, $1 \leq 10^{0.0103n} < 2$ であるから, $2^{10n} = 10^{3n} \cdot 10^{0.0103n}$ の首位の数は 1 であり, 10^{3n} の首位の数と一致している.

はじめて 2^{10n} の首位の数が不正確になるのは,

$$\begin{aligned}
 10^{0.0103n} &\geq 2 = 10^{0.30103} \\
 0.0103n &\geq 0.30103
 \end{aligned}$$

$$\therefore n \geq \frac{0.30103}{0.0103} = 29.2 \dots$$

となる最小の n , つまり, $n = \boxed{30}$ のときである.

宿題 2-3

(1) 略.

$$(2) \quad 2^a = 3 \quad \therefore 10^{0.30103a} = 10^{0.47712} \text{ となるのは,}$$

$$0.30103a = 0.47712 \quad \therefore a = \boxed{\frac{0.47712}{0.30103}}$$

のとき.

$$(3) \quad 2^x = 1, 2, 4, 8 \text{ となる } x \text{ は, それぞれ } x = 0, 1, 2, 3 \text{ である.}$$

$2^x = 5, 6, 7, 9$ となる x を, (2) と同様にして計算すると, 下の表を得る.

2^x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	0	1	$\frac{0.47712}{0.30103}$	2	$\frac{0.69897}{0.30103}$	$\frac{0.77815}{0.30103}$	$\frac{0.84510}{0.30103}$	3	$\frac{0.95424}{0.30103}$

$$(4) \quad 2^c = 10^b \quad \therefore 10^{0.30103c} = 10^b \text{ となるのは,}$$

$$0.30103c = b \quad \therefore c = \boxed{\frac{b}{0.30103}}$$

のとき.

$$(5) \quad \text{したがって, } y = 2^x \text{ のグラフは, } y = 10^x \text{ のグラフを,}$$

$$\boxed{x} \text{ 方向に } \boxed{\frac{1}{0.30103}} \text{ 倍に拡大したものである.}$$

$$(6) \quad \text{同様に考えれば, } 3^d = 10^b \quad \therefore 10^{0.47712d} = 10^b \text{ となるのは,}$$

$$0.47712d = b \quad \therefore d = \frac{b}{0.47712}$$

のときであるから, $y = 3^x$ のグラフは, $y = 10^x$ のグラフを,

$$\boxed{x} \text{ 方向に } \boxed{\frac{1}{0.47712}} \text{ 倍に拡大したものである.}$$

$$(7) \quad (5) \text{ より, } y = 10^x \text{ のグラフは, } y = 2^x \text{ のグラフを } x \text{ 方向に } 0.30103 \text{ 倍に拡大したものであり,}$$

$$(6) \text{ より, これを } x \text{ 方向に } \frac{1}{0.47712} \text{ 倍に拡大したものが } y = 3^x \text{ のグラフである.}$$

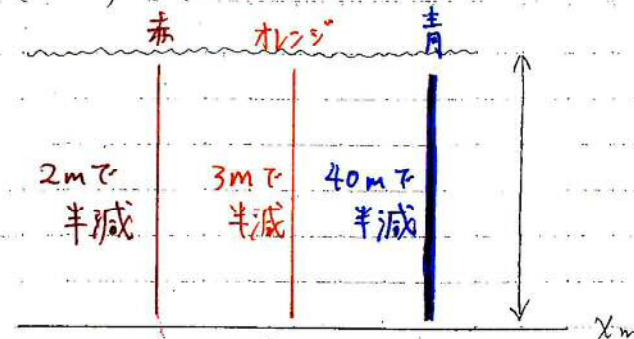
したがって, $y = 3^x$ のグラフは, $y = 2^x$ のグラフを, $\boxed{x}$ 方向に $0.30103 \cdot \frac{1}{0.47712} = \boxed{\frac{0.30103}{0.47712}}$ 倍に拡大したものである.

4日目

$$\pi^\pi = \log_{10} \pi^\pi = \pi \cdot \log_{10} \pi = 1.5603602$$

$$\pi^\pi = 10^{1.5603602} = 10^1 \cdot 10^{0.5603602} \approx 10^1 \cdot 3.63 = 36.3$$

(308)



(2) 海面での光が $\frac{1}{100}$ に減衰する深さは?

(赤) $(\frac{1}{2})^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{100}$

10を底とする対数を取ると

$$\log_{10} (\frac{1}{2})^{\frac{x}{2}} = \log_{10} \frac{1}{100}$$

光の強さは $(\frac{1}{2})^{\frac{x}{2}}$ $(\frac{1}{2})^{\frac{x}{3}}$ $(\frac{1}{2})^{\frac{x}{40}}$

$$\frac{x}{2} \cdot \log_{10} \frac{1}{2} = \log_{10} 10^{-2}$$

(橙) $(\frac{1}{2})^{\frac{x}{3}} = \frac{1}{100}$ $\log_{10}$ を取ると $= \log_{10} 2^{-1} = -\log_{10} 2$

$$\frac{x}{3} \cdot \log_{10} \frac{1}{2} = -2 \quad \therefore x = \frac{4}{\log_{10} 2} = \frac{4}{0.3} = 13.3(\text{m})$$

$$\therefore x = \frac{6}{\log_{10} 2} = \frac{6}{0.3} = 20(\text{cm})$$

(青) 計算をみれば、赤のときの20倍で $266.6 \dots (\text{m})$

(3) 赤色光の強さが青色光の強さの $\frac{1}{10000}$ になる深さは?

$$(\frac{1}{2})^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{10000} \cdot (\frac{1}{2})^{\frac{x}{40}} \quad \log_{10} \text{ を取ると}$$

$$\log_{10} (\frac{1}{2})^{\frac{x}{2}} = \log_{10} \left\{ \frac{1}{10000} \cdot (\frac{1}{2})^{\frac{x}{40}} \right\}$$

$$= \log_{10} \frac{1}{10000} + \log_{10} (\frac{1}{2})^{\frac{x}{40}}$$

$$\frac{x}{2} \cdot \log_{10} \frac{1}{2} = -4 + \frac{x}{40} \cdot \log_{10} \frac{1}{2}$$

$$\frac{19}{40} x \cdot (-\log_{10} 2) = -4$$

$$x = \frac{160}{19 \log_{10} 2} = \frac{160}{19 \cdot 0.3} = 28.07 \dots (\text{m})$$

オレンジも同様にして $43.7 \dots (\text{m})$ (略)

- (4) 30m もとぐると 青色光 に 比べて
赤・橙 の 光 の 強さは ほとんど 小さく なる ので...
赤や 橙 の 色は ほとんど 見え なく なる!
(青色 ばかり に 見える)

テキスト (501)

(1) $\log_3 X^2 = 4$ ココは $\log$ の 定義 だよ

解答1 * 対数法則より
 $2\log_3 X = 4$
 $\log_3 X = 2$
 $\therefore X = 3^2 = 9$
 定義なので OK

解答2 ココも OK
 $X^2 = 3^4 = 81$
 $\therefore X = \pm 9$
 ちゃんと代入して 成り立ちし
 正しいのは 解答2 なのだろう

誤っているのは (解答1) のはずで 誤まりの場所は * 以外ありえない

対数法則より $\log_3 X^2 = 2\log_3 X$ ①

$X = -9$ を
代入できる

$X = -9$ を代入できない!
(値が定まらない)

確かに 書きかえては マズ そうだ!

対数法則

$a > 0, a \neq 1, X > 0, Y > 0$ のとき

$\log_a (XY) = \log_a X + \log_a Y$

$\log_a \frac{X}{Y} = \log_a X - \log_a Y$

$\log_a X^y = y \log_a X$

は、昨日まで
気に しないで 大丈夫
だったけど、
方程式 になると
あふない!

例 $\log_3 (XY)$ には $(X, Y) = (-2, -5)$ を 代入 できるが、
 $\log_3 X + \log_3 Y$ には 代入 できない!

$\log_3 (XY) = \log_3 X + \log_3 Y$ と 書きかえられたのは、 $X > 0, Y > 0$ のとき!

(1) $\log_3 X^2 = 4$ は、素直に $3^4 = X^2$ と 言い直せば OK

(対数法則 を 使わず)

(2) $2\log_3 X = 4$ も $\log_3 X = 2, 3^2 = X$ とすれば OK

... ④

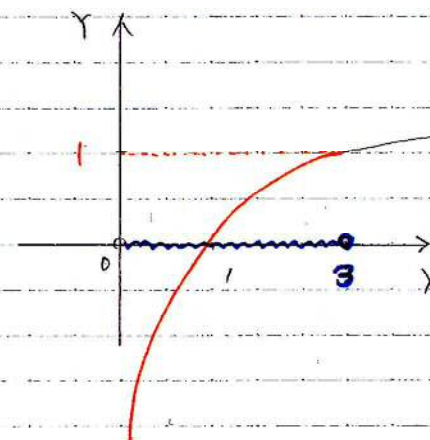
④ の 両辺 が 定義 されたのは、 $X > 0$ のとき、この下では 対数法則より

$2\log_3 X = \log_3 X^2$ なので、④ は $\log_3 X^2 = 4$ と 言い換えられたから

$X^2 = 3^4, X > 0$ のとき $X = 3^2 = 9$

... とすれば 対数法則 を 用いて 正しく 解ける

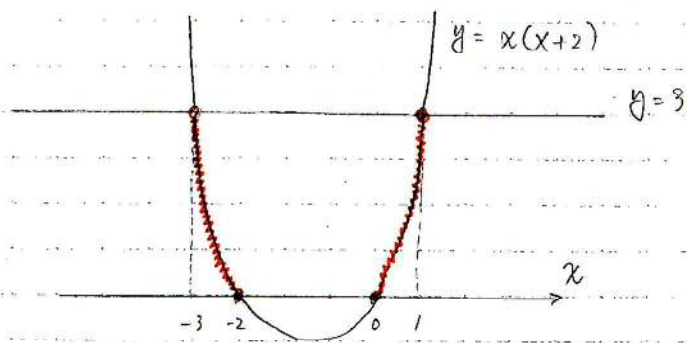
(3) $\log_3 X(X+2) \leq 1$... ⑤ $Y = \log_3 X$ の グラフ は



なので、 $\log_3 X \leq 1$ となる X の 範囲は

$0 < X \leq 3$

したがって (★) は $0 < x(x+2) \leq 3$ となる。



$y = x(x+2)$ のグラフより、この不等式の x の範囲は

$$\boxed{-3 \leq x < -2, \quad 0 < x \leq 1}$$

(4) $\log_3 x + \log_3 (x+2) \leq 1$

左辺を対数法則でまとめたら (3) の不等式だ!

~~だから (3) と同じ~~

不等式の左辺が定義されるのは

$$\begin{cases} x > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \quad \therefore x > 0$$

のときで、この下で考えると

対数法則より $\log_3 x + \log_3 (x+2) = \log_3 x(x+2)$ なので、与式は

$$\log_3 x(x+2) \leq 1 \quad \dots (★) \text{ となる} \quad (3) \text{ と同じ式になる}$$

(★) の解は $-3 \leq x < -2, \quad 0 < x \leq 1$ となる。

$x > 0$ とあわせて

$$\boxed{0 < x \leq 1}$$

§4 対数表と概数計算

(401) テキスト p44-45: 対数表

$\log_{10} 1.00 \sim \log_{10} 9.99$ の値も小数第6位で四捨五入したものの表

(1) (a) $\log_{10} 2 = 0.30103$ (b) $\log_{10} 2.32 = 0.36549$

	0	1	2
2.0	0.30103		
2.3			0.36549

(2) $\log_{10} 3600$
 $= \log_{10} (10^3 \cdot 3.6)$
 $= \log_{10} 10^3 + \log_{10} 3.6$ 表より
 $= 3 + 0.55630$
 $= 3.55630$

(3) $\log_{10} 0.0021 = \log_{10} (10^{-3} \cdot 2.1) = \log_{10} 10^{-3} + \log_{10} 2.1$
 $= -3 + 0.32222 = \boxed{-2.67778}$

(4) $\log_{10} 2.016 = \log_{10} (4 \cdot 0.504)$
 $= \log_{10} 4 + \log_{10} (10^{-1} \cdot 5.04)$
 $= \log_{10} 4 + \log_{10} 10^{-1} + \log_{10} 5.04$
 $= 0.60206 - 1 + 0.70243 = \boxed{0.30449}$

$\log_{10} \frac{1}{28} = \log_{10} 28^{-1} = -\log_{10} 28 = -\log_{10} (10 \cdot 2.8)$
 $= -(\log_{10} 10 + \log_{10} 2.8)$
 $= -(1 + 0.44716)$
 $= \boxed{-1.44716}$

(2) (6) $10^{0.4}$

$\log_{10} 2.51 = 3.9967$ が最も 0.4 に近いので、

$10^{0.4} \approx 2.51$

(い) $10^{0.8} \approx 10^{0.80003} = 6.31$

■ $10^{0.8} = (10^{0.4})^2$ だが、

2.51^2 を計算する必要はない!

(う) $10^{1.52} = 10^{1+0.52} = 10 \cdot 10^{0.52}$

$\approx 10 \cdot 10^{0.51783} = 10 \cdot 3.31 = 33.1$

(え) $\sqrt{10^{1.52}} = (10^{1.52})^{\frac{1}{2}} = 10^{0.76}$

$\approx 10^{0.75967} = 5.75$

■ 33.1 の平方根を計算しなくても表から読める!

(402) (1) $2.4^{3.6}$ はおおよそいくつ?

対数表があるので、 $\log_{10}$ の値から読みとれる!

$\log_{10} 2.4^{3.6} = 3.6 \log_{10} 2.4 = 3.6 \cdot 0.38021 = 1.368756$

$\therefore 2.4^{3.6} = 10^{1.368756} = 10^1 \cdot 10^{0.368756}$
 $\approx 10^1 \cdot 10^{0.36922} = 10 \cdot 2.34 = \boxed{23.4}$

(2) π^{π} はおおよそいくつ?

(404) 100 日間に 10 割の利率で 1 万円を借りた。
 100 日後に 2 万円を返せばいいと思ってる...

(1) 実は 10 日間複利だった!

つまり 借りてゐる額は
 はじめ 10 日後 20 日後

1 万円 $\rightarrow$ 1.1 万円 $\rightarrow$ 1.21 万円 $\rightarrow$...

1 割の利率、
 ($\times 1.1$)、
 1 割の利率
 ($\times 1.1$)

と計算されて 100 日後には 1.1^{10} 万円を返さなくてはならない!

$\log_{10} 1.1^{10} = 10 \log_{10} 1.1 = 10 \cdot 0.04139 = 0.4139$

つまり、 $1.1^{10} = 10^{0.4139} \approx 10^{0.41330} = 2.59$

$\therefore \boxed{2.59 \text{ 万円}}$

(2) 実は 1 日複利だった! ... すると、返済額は

$\log_{10} 1.01^{100} = 100 \log_{10} 1.01$
 $= 100 \cdot 0.00432$
 $= 0.432$

$\therefore 1.01^{100} = 10^{0.432} \approx 10^{0.43136} = 2.70$

$\therefore \boxed{2.7 \text{ 万円}}$

それは増えなかったの？ 1時間複利にしてみよう！

毎時 $\frac{100}{2400}\%$ の利子がつくので、100日後の返済額は

$$\left(1 + \frac{1}{2400}\right)^{2400} \text{ 万円}$$

$x =$ で表示されている数の
2乗することができる

これは対数表でも手には余るので、電卓を使って

$$\frac{2049}{2048} \text{ の } 2 \text{ 乗、} 2 \text{ 乗、} \dots \text{、} 2 \text{ 乗}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2048}\right)^{2048} = \left(\frac{2049}{2048}\right)^{2048}$$

11回
くりかえすと
2" = 2048乗だ!!

④ 実は、どんどん細かい複利としていっても
金額は 2.71828... で頭うちになることが知られている

⑤ この頭うちの数は、指数・対数ではとても大事な数

(理系、高2 1学期に扱う)

(406)

毎月の返済額を x 万円とするローンの残金は (単位は万円)

はじめ 5000 長いので r とおく

1月後 $5000 \times 1.0025 - x$

2月後 $(5000r - x)r - x = 5000r^2 - xr - x$

3月後 $(5000r^2 - xr - x)r - x = 5000r^3 - xr^2 - xr - x$

$$\begin{aligned} 20 \text{ 年} = 240 \text{ 月後} \quad & 5000r^{240} - xr^{239} - xr^{238} - \dots - xr - x \\ & = 5000r^{240} - x(r^{239} + r^{238} + \dots + r + 1) \\ & = 5000r^{240} - x \cdot \frac{r^{240} - 1}{r - 1} \end{aligned}$$

これがちょうど 0 になるので、

$$5000r^{240} - x \cdot \frac{r^{240} - 1}{r - 1} = 0 \quad \therefore x = \frac{5000r^{240}(r - 1)}{r^{240} - 1} = 12.5 \cdot \frac{r^{240}}{r^{240} - 1}$$

あとは r^{240} の計算だ!

$$\log_{10} r^{240} = 240 \log_{10} r = 240 \log_{10} 1.0025 = 240 \log_{10} \frac{4.01}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore r^{240} &= 10^{0.2592} \approx 10^{0.26007} = 1.82 \\ &= 240 (\log_{10} 4.01 - \log_{10} 4) \\ &= 240 (0.60314 - 0.60206) \end{aligned}$$

$$\text{したがって、} x = 12.5 \times \frac{1.82}{0.82} = 27.743902 \dots$$

$$= 240 \cdot 0.00108 = 0.2592$$

$\therefore$ 月々の返済額は 27万7439円

(240月で総額は 6658万5360円)

高 1 春期 指数・対数関数 宿題-4

宿題 4-1

$a = \log_6 2$, $b = \log_6 5$ とするとき、次を a, b を用いて表しなさい。

- | | | |
|-------------------|-----------------|-------------------|
| (1) $\log_6 10$ | (2) $\log_6 24$ | (3) $\log_6 3$ |
| (4) $\log_{36} 2$ | (5) $\log_2 6$ | (6) $\log_{10} 5$ |

宿題 4-2

新規 SSR の排出率が 1.5% のガチャがある。このガチャを n 回引くとき、獲得できる新規 SSR の枚数の期待値は $0.015n$ であることが知られている。

以下、テキスト巻末の対数表と、必要なら電卓を利用して計算しなさい。

- (1) $\log_{10} 0.985$ の値を求めなさい。
- (2) 新規 SSR 獲得枚数の期待値がはじめて 1 を超えるのは、67 回くじを引いたときである。
このくじを 67 回引いたとき、1 枚も新規 SSR を引けていない確率はおよそ何%か。
- (3) このガチャを 267 回引くと、新規 SSR 獲得枚数の期待値は 4 を超える。さて、「出るまで引く」の覚悟でこのガチャを引き始めた某先生が、不幸にも 267 回ガチャを引いていまだ 1 枚も新規 SSR を引けていない確率と、幸運にも 1 回目で新規 SSR を引く確率では、どちらの方が高いだろうか。

宿題 3-1

- (1) $\log_7 4 + \log_7 3 = \log_7 (4 \cdot 3) = \boxed{\log_7 12}$
 (2) $\log_7 14 - \log_7 2 = \log_7 \frac{14}{2} = \log_7 7 = \boxed{1}$
 (3) $\log_7 8 - \log_7 1 = \log_7 2^3 - 0 = \boxed{3 \log_7 2}$
 (4) $\log_8 2 = \log_{2^3} 2 = \boxed{\frac{1}{3}}$
 (5) $\log_{16} \frac{1}{8} = \log_{2^4} 2^{-3} = \boxed{-\frac{3}{4}}$

■ 底変換の公式を利用してもよい.

- (4) $\log_8 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2}{\log_2 2^3} = \boxed{\frac{1}{3}}$
 (5) $\log_{16} \frac{1}{8} = \frac{\log_2 \frac{1}{8}}{\log_2 16} = \frac{\log_2 2^{-3}}{\log_2 2^4} = \frac{-3}{4} = \boxed{-\frac{3}{4}}$

宿題 3-2

- (1) $\log_{10} 18$
 $= \log_{10} (2 \cdot 3^2)$
 $= \log_{10} 2 + \log_{10} 3^2 = \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3$
 $= 0.30103 + 2 \times 0.47712 = \boxed{1.25527}$
 (2) (1)の結果を利用して,
 $\log_{10} 18^{50} = 50 \log_{10} 18 = 50 \cdot 1.25527 = 62.7635$
 $\therefore 18^{50} = 10^{62.7635}$
 ここで,
 $\log_{10} 5 = 0.69897 < 0.7635 < 0.77815 = \log_{10} 6$
 $\therefore 5 < 10^{0.7635} < 6$
 であるから,
 $5 \cdot 10^{62} < 18^{50} < 6 \cdot 10^{62}$
 よって, 18^{50} は $\boxed{63}$ 桁で首位の数は $\boxed{5}$.
 (3) $\log_{10} 0.9$
 $= \log_{10} \frac{9}{10} = \log_{10} 9 - \log_{10} 10$
 $= 0.954240 - 1 = \boxed{-0.04576}$
 (4) (3)の結果を利用して,

$$\begin{aligned} \log_{10} 0.9^{100} &= 100 \log_{10} 0.9 = 100 \cdot (-0.04576) \\ &= -4.576 = -5 + 0.424 \\ \therefore 0.9^{100} &= 10^{-5} \cdot 10^{0.424} \end{aligned}$$

ここで,
 $\log_{10} 2 = 0.30103 < 0.424 < 0.47712 = \log_{10} 3$
 $\therefore 2 < 10^{0.424} < 3$
 であるから,
 $2 \cdot 10^{-5} < 0.9^{100} < 3 \cdot 10^{-5}$
 よって, 0.9^{100} は小数第 $\boxed{5}$ 位にはじめて 0 でない数 $\boxed{2}$ が現れる.

宿題 3-3

「少なくとも 1 回新規 SSR を引く」確率が 98%以上になるのは, 余事象である「すべて新規 SSR でない」確率が 2%以下になるときである. n 回くじを引いてすべてあたりでない確率は, $(1 - 0.02)^n = 0.98^n$ であるから,
 $0.98^n \leq 0.02$
 となる最小の自然数 n を求めればよい.
 $y = \log_{10} x$ のグラフは右上がり ($y = \log_{10} x$ は増加関数) なので, 両辺の 10 を底とする対数を取ると,
 $\log_{10} 0.98^n \leq \log_{10} 0.02$
 $\therefore n \log_{10} 0.98 \leq \log_{10} 0.02$
 となる. 対数を計算すると
 $\log_{10} 0.98 = \log_{10} \frac{2 \times 7^2}{10^2}$
 $= \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 7 - \log_{10} 10^2$
 $= 0.30103 + 2 \times 0.84510 - 2 = -0.00877$
 $\log_{10} 0.02 = \log_{10} \frac{2}{10^2} = \log_{10} 2 - \log_{10} 10^2$
 $= 0.30103 - 2 = -1.69897$
 なので,
 $n \cdot (-0.00877) \leq -1.69897$
 $\therefore n \geq \frac{1.69897}{0.00877} = 193.7 \dots$
 よって, $\boxed{194}$ 回.

残問解答

(306)

- (1) $\log_3 15 = \log_3 (3 \cdot 5) = \log_3 3 + \log_3 5 = \boxed{1+a}$
 (2) $\log_3 2 = \log_3 \frac{6}{3} = \log_3 6 - \log_3 3 = \boxed{b-1}$
 (3) $\log_3 48 = \log_3 (2^4 \cdot 3) = \log_3 2^4 + \log_3 3$
 $= 4 \log_3 2 + \log_3 3 = 4(b-1) + 1 = \boxed{4b-3}$
 (4) $\log_6 5 = \frac{\log_3 5}{\log_3 6} = \boxed{\frac{a}{b}}$
 (5) (2)より, $\log_3 2 = b-1$ であるから,
 $\log_{10} 2 = \frac{\log_3 2}{\log_3 10} = \frac{b-1}{\log_3 10}$

ここで,

$$\begin{aligned} \log_3 10 &= \log_3 (2 \cdot 5) = \log_3 2 + \log_3 5 = b-1+a \\ \therefore \log_{10} 2 &= \boxed{\frac{b-1}{a+b-1}} \end{aligned}$$

(6) $\log_{100} 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 100} = \frac{\log_3 3^3}{\log_3 10^2} = \frac{3}{2 \log_3 10}$
 であるから, (5)の途中計算より,
 $\log_{100} 27 = \boxed{\frac{3}{2(a+b-1)}}$

(307)

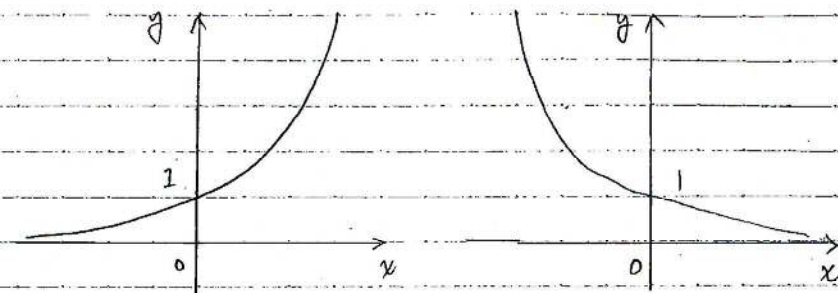
(2) n 回振って, 同じ目が連続してでない確率は, はじめは何の目でもよく, 2 回目以降は直前とは異なる目が出続けるのだから,
 $\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$
 である. これが 1 億分の 1 を下回る, つまり
 $\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} < \frac{1}{10^8}$
 となるような n の範囲を求めたい.
 $y = \log_{10} x$ のグラフは右上がり ($y = \log_{10} x$ は増加関数) なので, 両辺の 10 を底とする対数を取ると,
 $(n-1) \log_{10} \frac{5}{6} < -8$
 である.
 いま,
 $\log_{10} \frac{5}{6} = \log_{10} \frac{10}{2^2 \cdot 3} = 1 - (2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3)$
 $= 1 - (2 \cdot 0.30103 + 0.47712)$
 $= -0.07918$
 であるから,
 $(n-1) \cdot (-0.07918) < -8$
 $\therefore n > 102.03 \dots$
 なので, $\boxed{103}$ 回以上のとき.

5日目

§5 興味深い話題

① 指数・対数関数のグラフの凸性

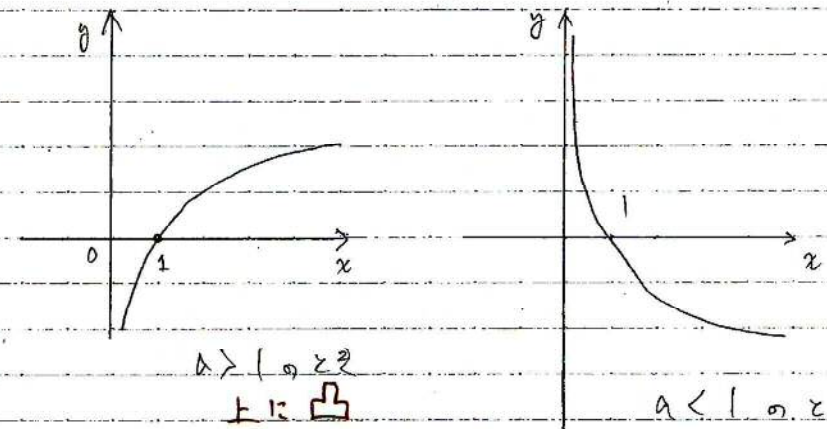
$a > 0$, $a \neq 1$ のとき 指数関数 $y = a^x$ のグラフは 下に凸



$a > 1$ のとき

$0 < a < 1$ のとき

対数関数 $y = \log_a x$ のグラフは ($x = a^y$ のグラフと同じ形の反転)



$a > 1$ のとき
上に凸

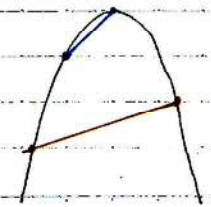
$0 < a < 1$ のとき (参: H3.2)
下に凸

になてゐるように見える

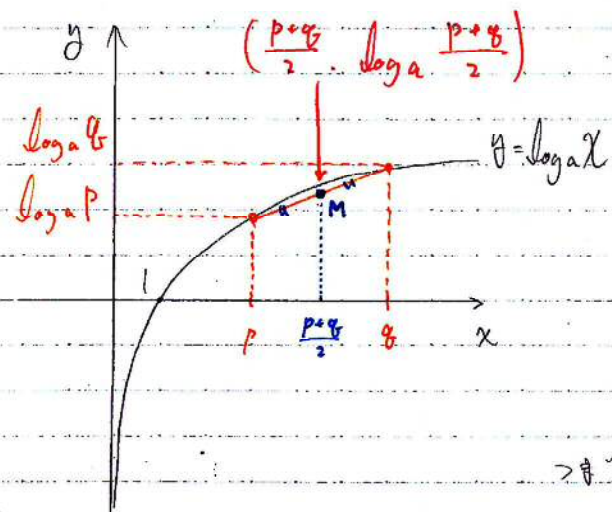
xy 平面の曲線に対して「上に凸」とは、曲線上の任意の2点に
 対して、その2点をつなぐ線分が「曲線の下側」にあることという

(例) $y = -x^2$ のグラフは「上に凸」

下に凸も同様



$a > 1$ のとき、 $y = \log_a x$ のグラフが本当に上に凸かどうか確認してみよう。



$p > 0, q > 0$ とし、
グラフ上に $P(p, \log_a p)$
 $Q(q, \log_a q)$ を取る
線分 PQ 上の点として
中点 $M(\frac{p+q}{2}, \frac{\log_a p + \log_a q}{2})$
を取る

本当にグラフが上に凸なら、
 M はグラフ上の点
 $(\frac{p+q}{2}, \log_a \frac{p+q}{2})$

より小にあるはず

$$\log_a \frac{p+q}{2} > \frac{\log_a p + \log_a q}{2} \quad \text{--- ④}$$

右辺は $\frac{\log_a(pq)}{2} = \log_a (pq)^{\frac{1}{2}} = \log_a \sqrt{pq}$ が成立しはず

④は $\log_a \frac{p+q}{2} > \log_a \sqrt{pq}$

④は成立してる？

この不等式！

$p > 0, q > 0$ なら、**相加相乗平均の不等式** より

$$\frac{p+q}{2} \geq \sqrt{pq} \quad (\text{等号成立条件は } p=q) \text{ が成立するので}$$

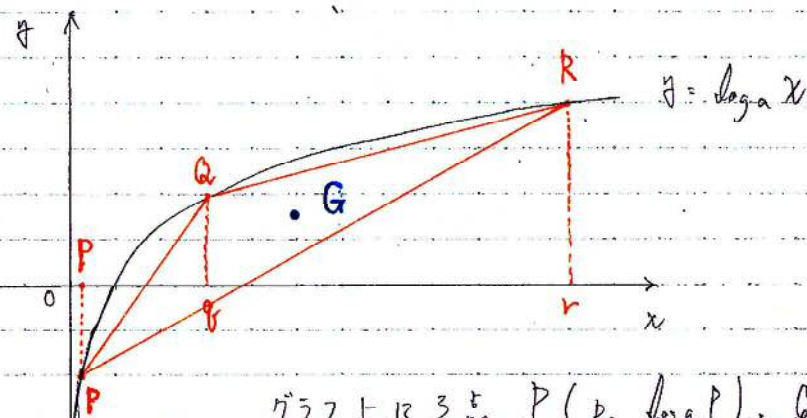
今 $p \neq q$ より $\frac{p+q}{2} > \sqrt{pq}$ より確かに ④は成立する。

グラフ上の任意の 2 点 P, Q に対して、

P, Q の中点 M はグラフより下側にあると言えた

... グラフは上に凸と言えていいだろう！

グラフ上に凸と納得できたので、これを利用してみる



グラフ上に 3 点 $P(p, \log_a p), Q(q, \log_a q), R(r, \log_a r)$

を取る ($p > 0, q > 0, r > 0$)
 p, q, r は
全て異なる

すると、 PQ, QR, PR はすべてグラフの下側にあるので、
三角形 PQR はグラフの下側にある。

特に三角形 PQR の重心 G もグラフの下側にある

$$G(\frac{p+q+r}{3}, \frac{\log_a p + \log_a q + \log_a r}{3})$$

$$\text{よって、} \log_a \frac{p+q+r}{3} > \frac{\log_a p + \log_a q + \log_a r}{3} = \frac{\log_a(pqr)}{3} = \log_a \sqrt[3]{pqr}$$

$$\text{となる、} \frac{p+q+r}{3} > \sqrt[3]{pqr} \text{ となることを導ける！}$$

[2] (テキスト p43)

軌道の長半径 X (Au) と公転周期 Y (day) の間には
 X^n と Y^m が比例する。つまり、 $Y^m = c \cdot X^n$ (c は定数)
 という関係があるそうだ。
 こゝなる n, m を見つけてみよう

両辺の $\log_{10}$ を取って (93 のアイデアだね!)

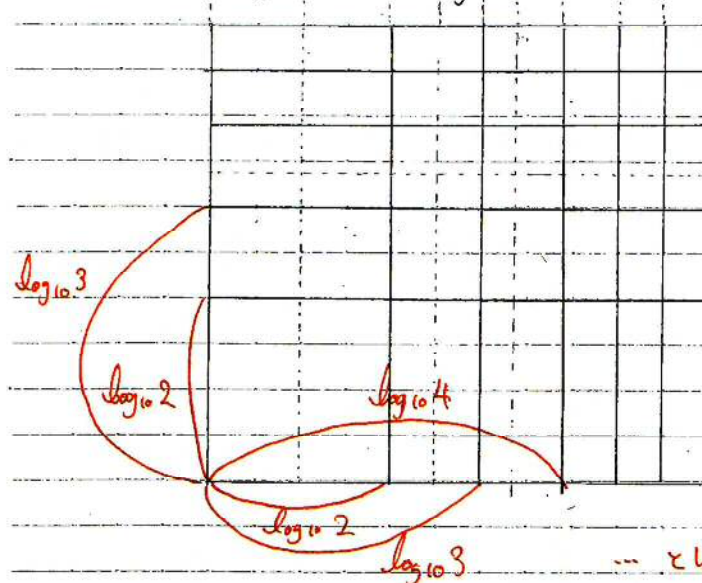
$$\log_{10} Y^m = \log_{10} c + \log_{10} X^n$$

$$m \log_{10} Y = \log_{10} c + n \log_{10} X$$

$$\therefore \log_{10} Y = \frac{n}{m} \log_{10} X + \frac{1}{m} \log_{10} c$$

つまり、①の 関係があるということは 対数で考えると

$\log_{10} Y$ は $\log_{10} X$ の 1 次関数だということになる



... として目盛りを取っている

対数目盛りのグラフ用紙を使って ($\log_{10} X, \log_{10} Y$) をプロットすると、傾き $\frac{3}{2}$ の直線上に並んでいるように分かる

$$\Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{3}{2} \text{ なのて } m=2, n=3 \text{ として}$$

長半径の 3 乗と公転周期の 2 乗に比例関係がある

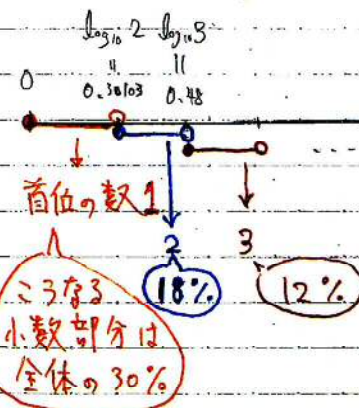
と読み取れる!

[3] (504) 人口の首位の数値は...

首位の数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
国の数	64	31	23	21	20	10	11	11	9

32%, 15.5%, 11.5%, 10.5%, 10%, 5%, 5.5%, 5.5%, 4.5%

人口 Y の首位の数値は、
 $\log_{10} Y$ の小数部分で分かるのだ



人口 Y の対数の小数部分が
 0~1 の間に「ランダムに」ちぎれるなら
 納得のできる偏りになっているぞ?

こゝで、ある国の人口 Y は
 人口増加率 a と時間 t を用いて
 (「毎年の倍率」) (「年」)

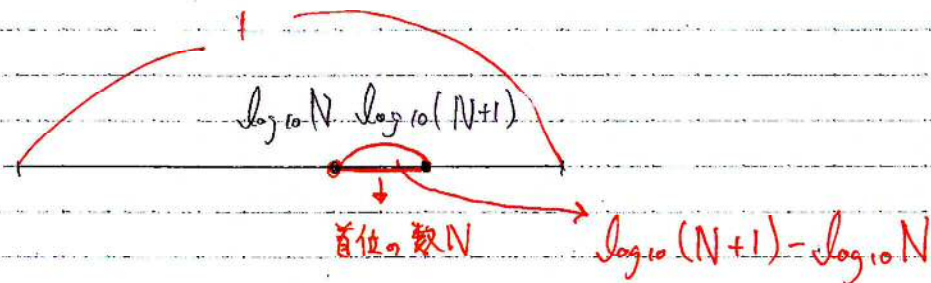
$Y = C \cdot a^t$ (C : 定数) (「ある年の人口」)
 と指数関数的に増加していると仮定することができる

すると、 $\log_{10} Y = \log_{10} C + t \log_{10} a$ となる。

$\log_{10} Y$ の値は 時間 t の 1 次関数となるので、

ある t において、 $\log_{10} Y$ との 小数部分が

0~1 の間のどこにあるかは 同様に 確かめるので



Y の 首位の数が N となるのは、

$$\log_{10} N \leq \log_{10} Y \text{ の 小数部分} < \log_{10} (N+1)$$

となるとき、確率は $\log_{10} (N+1) - \log_{10} N$ である

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\log_{10} n$	0	0.30	0.48	0.60	0.70	0.78	0.85	0.90	0.95

と12

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
その確率	0.30	0.18	0.12	0.10	0.08	0.07	0.05	0.05	0.05

国の割合とよくあっている

(つまり、人口も $Y = C \cdot a^t$ と仮定したことは、
 この結果とぴったりが合っている)

④ 「指数関数的に変化する数値」は自然界によくあって、

首位の数も232 ④ の分布に従うことが多い

このことを、発見者にちなんで「ベンフォードの法則」という

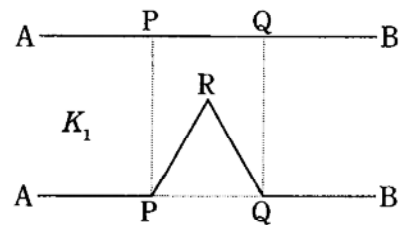
問題 5-1

図形 F が、 F 自身を相似縮小した図形いくつかに分割できるとき、 F をフラクタル図形であるということにする。

次がフラクタル図形であることを確認しなさい。

- (1) 線分
- (2) 長方形
- (3) 直方体
- (4) コッホ曲線

コッホ曲線とは、次のような曲線である。
線分 AB を用意して、3 等分点 P, Q を取る。



線分 PQ を 1 辺とする正三角形 PQR を描き、線分 PQ (端点を除く) を消して得られる折れ線を K_1 とする。

次に、 K_1 を構成する 4 本の線分すべてに対して、線分 AB から K_1 を作るのと同じ「3 等分して正三角形を書き足して線分を消す」という操作を行い、得られる折れ線を K_2 とする。

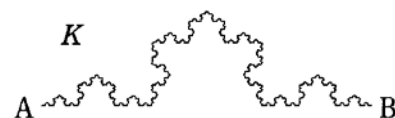


以下同様に、 K_i を構成する線分すべてに対して、それらを「3 等分して正三角形を書き足して線分を消す」という操作を行うことで得られる折れ線を K_{i+1} とする。



ただし、各操作で正三角形を書き足す際には、折れ線上を A から B へと進む向きに対して、左側に描くものとする。

この操作を「際限なく続けることで得られる曲線」を K とすると、 K は自己交差しない曲線になる。これをコッホ(Koch)曲線という。



問題 5-2

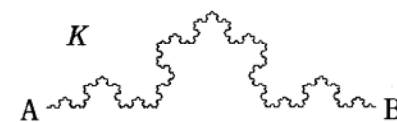
フラクタル図形 F が、 F を $\frac{1}{n}$ 倍に相似縮小した図形 $N(n)$ 個に分割されるとき、 F の次元 (フラクタル次元) を

$$d = \log_n N(n)$$

として決めることにしよう。

- 分割の取り方と関係なく一定の値になるのかなど、本当は気にしなくてはいけないことがあるが、ここではおおらかに考えることにする。

前問のコッホ曲線 K について考える。

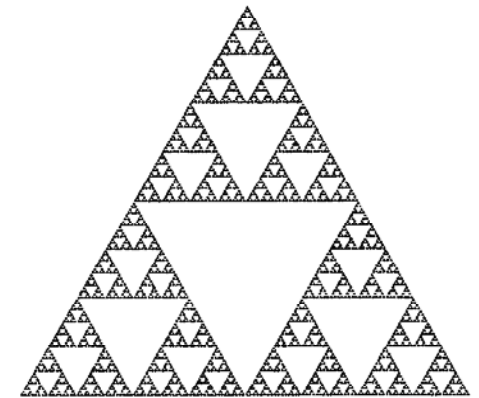


はじめの線分 AB の長さを 3 とするとき、

- (1) K の長さはどうなっていると考えられるか。
- (2) K と線分 AB で囲まれる部分の面積はどうなっていると考えられるか。
- (3) K のフラクタル次元を求めなさい。

問題 5-3 (1 次元と 2 次元のあいだ)

次の図形 G はシェルピンスキー(Sierpinski)のギャスケットと呼ばれるフラクタル図形であり、正三角形から、三辺の中点をつなぐ正三角形を取り除く、という操作の果てに得られる図形である。



はじめの正三角形の 1 辺の長さを 1 とするとき、

- (1) G の「周の長さ」はどうなっていると考えられるか。
- (2) G の面積はどうなっていると考えられるか。
- (3) G のフラクタル次元を求めなさい。

練習 5-3a

- (1) シェルピンスキーのカーペットと呼ばれるフラクタル図形がある。名前からどのような図形か想像して、そのフラクタル次元を求めてみよう。
- (2) フラクタル次元が 1.5 であるようなフラクタル図形を作ってみよう。

問題 5-4 (1次元から2次元へ)

線分 AB を用意する。

線分 AB を斜辺とする直角二等辺三角形を描き、線分 AB (端点を除く) を消して得られる折れ線を D_1 とする。

次に、 D_1 の各折れ線に対して、線分 AB から D_1 を構成したのと同じ操作を行い、得られる折れ線を D_2 とする。ただし、折れ線上を A から B へと進む方向に対して、直角二等辺三角形は左、右、左、右と交互に取っていくことにする。

以下、同様の操作を繰り返すことで、

$D_3, D_4, \dots$

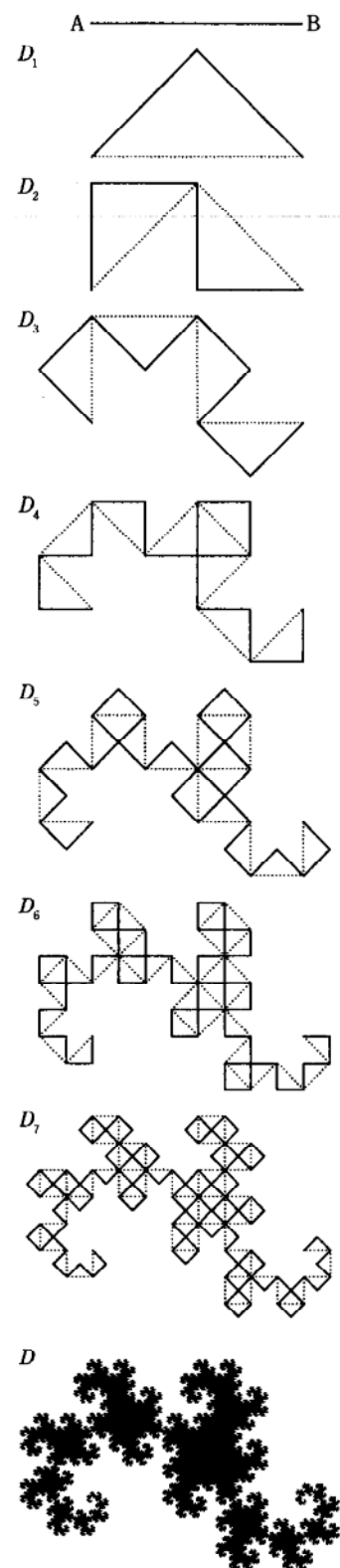
を順々に定めていき、この操作を「際限なく続けることで得られる曲線」を D とする。

この図形は、ヘイウェイ (Heighway) のドラゴン曲線と呼ばれる。

- (1) D はフラクタル図形であることを確認しなさい。
- (2) D のフラクタル次元を求めなさい。

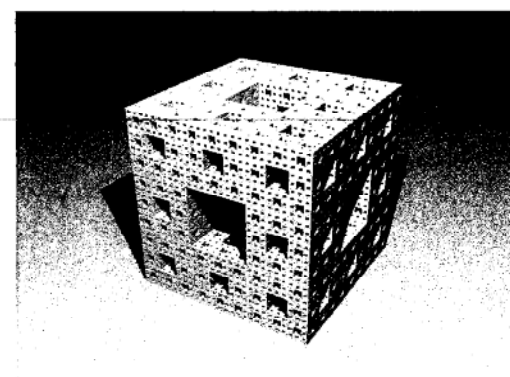
➤ カントール (Cantor) は、「線分に含まれる点たち」と「球体に含まれる点たち」の濃度が等しい (つまり「線分に含まれる1つの点と、球体に含まれる1つの点の組」を作っていくことで、線分と球体のすべての点たちを、どちらの点も余らせることなく、ペアにしていまうことができる) ことを証明した。このことに触発されて、ペアノ (Peano) は「正方形を埋め尽くす曲線」を作った。

正方形のような平面図形や、立方体、球体などの立体図形を埋め尽くす曲線のことを、空間充填曲線とか、ペアノ曲線という。



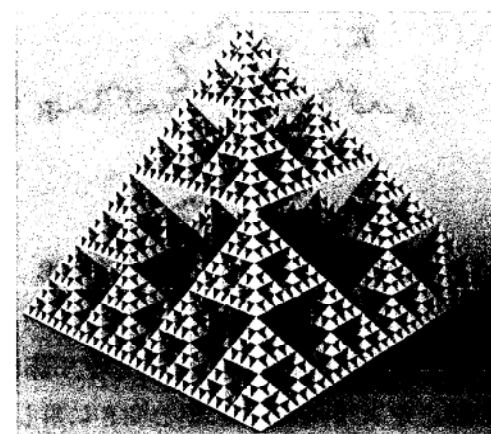
問題 5-5 (2次元と3次元のあいだ)

I) 次の図形 M はメンガー (Menger) のスポンジとよばれるフラクタル図形である。



- (1) M の表面積について考察しなさい。
- (2) M の体積について考察しなさい。
- (3) M のフラクタル次元を求めなさい。

II) 次の図形 S はシェルピンスキーのピラミッドとよばれるフラクタル図形である。



- (1) S の表面積について考察しなさい。
- (2) S の体積について考察しなさい。
- (3) S のフラクタル次元を求めなさい。

問題 5-6

シェルピンスキーの四面体とよばれるフラクタル図形がある。

- (1) シェルピンスキーの四面体がどのような図形か想像し、そのフラクタル次元を計算してみなさい。
- (2) (1)の結果がなぜそうなっているのか、説明してみよ。

練習 5-6a

2.5次元のフラクタル図形を考えてみよう。

高1 春期 指数・対数関数 宿題-4 解答

宿題 4-1

$$(1) \log_6 10 = \log_6 2 \cdot 5 = \log_6 2 + \log_6 5 = \boxed{a+b}$$

$$(2) \log_6 24 = \log_6 2^2 \cdot 6 = \log_6 2^2 + \log_6 6 \\ = 2 \log_6 2 + 1 = \boxed{2a+1}$$

$$(3) \log_6 3 = \log_6 \frac{6}{2} = \log_6 6 - \log_6 2 = \boxed{1-a}$$

$$(4) \log_{36} 2 = \log_{6^2} 6^a = \boxed{\frac{a}{2}}$$

$$(5) \log_2 6 = \log_{6^a} 6^1 = \boxed{\frac{1}{a}}$$

$$(6) (1) \text{より, } 6^{a+b} = 10 \text{ なので,}$$

$$\log_{10} 5 = \log_{6^{a+b}} 6^b = \boxed{\frac{b}{a+b}}$$

■ 底変換の公式を利用してもよい.

$$(4) \log_{36} 2 = \frac{\log_6 2}{\log_6 36} = \boxed{\frac{a}{2}}$$

$$(5) \log_2 6 = \frac{\log_6 6}{\log_6 2} = \boxed{\frac{1}{a}}$$

$$(6) \log_{10} 5 = \frac{\log_6 5}{\log_6 10} = \boxed{\frac{b}{a+b}}$$

宿題 4-2

$$(1) \log_{10} 0.985$$

$$= \log_{10} \frac{9.85}{10} = \log_{10} 9.85 - \log_{10} 10$$

$$= 0.99344 - 1 = \boxed{-0.00656}$$

$$(2) \text{ 求める確率は } 0.985^{67} \text{ である.}$$

$$\log_{10} 0.985^{67}$$

$$= 67 \log_{10} 0.985 = 67 \times (-0.00656)$$

$$= -0.43952 = -1 + 0.56048$$

であり, 対数表で 0.56048 に最も近いのは

$$\log_{10} 3.64 = 0.56110$$

なので,

$$0.985^{67} = 10^{-1+0.43952} = 10^{-1} \times 10^{0.56048}$$

$$\approx 10^{-1} \times 3.64 = 0.364$$

したがって, 67 回引いても新規 SSR を 1 枚

も引けない確率は, およそ $\boxed{36\%}$ である.

$$(2) \text{ 求める確率は } 0.985^{267} \text{ である.}$$

$$\log_{10} 0.985^{267}$$

$$= 267 \log_{10} 0.985 = 267 \times (-0.00656)$$

$$= -1.75152 = -2 + 0.24848$$

であり, 対数表で 0.24848 に最も近いのは

$$\log_{10} 1.77 = 0.24797$$

なので,

$$0.985^{67} = 10^{-2+0.24848} = 10^{-2} \times 10^{0.24848}$$

$$\approx 10^{-2} \times 1.77 = 0.0177$$

したがって, 267 回引いても新規 SSR を 1 枚

も引けない確率は, およそ 1.8% であり, 1 回

目に引く確率 1.5% よりも高い.

■ 天井まで 300 連だったとすると, このガチャを 300 連してなお新規 SSR を引けない確率は

$$0.985^{300} = 0.0107 \dots$$

つまり, 約 1% である.

周りと比べるのであれば, 67 人に 1 人は初回

で引いている一方で, 100 人に 1 人は天井す

るはめになる. ガチャとはそういうもの.