

1日目

(102)

- 12) (abc) (abd) (abe) (acd) (ace) (ade) (bcd) (bce) (bde) (cde)
- 11)

acb	adb
bac	bad
bca	bda
cab	dab
cba	dba

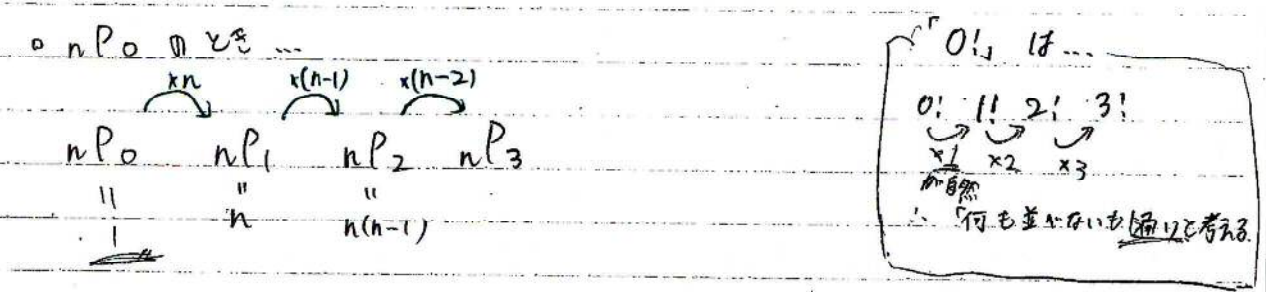
ced
dce
dec
cde
ced

$5P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3$
 $= 5C_3 \times 3!$ と分かる。
 $\therefore 5C_3 = \frac{5P_3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ と求むればよい。

12) まとめる。

$$\begin{cases} nCr & n \text{個から} r \text{個のえらび方} \\ nPr & \text{「 } n \text{個から } r \text{個のえらび方」} \end{cases} \Rightarrow nCr = \frac{nPr}{r!} \text{ と計算してよい。}$$

これを $r = 0, 1, 2, \dots, n$ 全てで成り立つように記号を定めたい。



また、 nC_0 のときも、以上より。

$$nC_0 = \frac{nP_0}{0!} = \frac{1}{1} = 1.$$

$\therefore$ 「何もえらばない」のも1通りと考える。

$$(4) \quad nCr = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots (n-r+1)}{r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdot (r-3) \cdots 1} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\therefore nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$nCr = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

⑩ $0P0$, $0C0$ は?

$$0P0 = \frac{0!}{(0-0)!} = 1 \quad 0C0 = \frac{0!}{0!(0-0)!} = 1 \quad \text{と定められる。}$$

(103)

(1) 黒 3 白 5.
 $8C3 = 56$

(2) $9C2 \times 7C3 = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} \times \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 36 \times 35 = 1260$

(3) $6C3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$

(4) $8C3 \times 5C3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \times 10 = 560$

このうち C が 2 通り合うのは、 $7C3 \times 4C3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35 \times 4 = 140$

$\therefore$ 求める場合の数は $560 - 140 = 420$ 通り

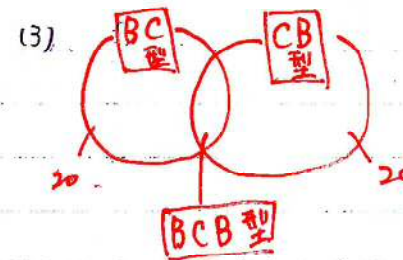
(5) A 5, B 3, C 1

$$8C5 \times 3C3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \times 1 = 56$$

(104)

(1) B 2 通り 3 通り 1 通り
 $4 \times 12 = 48$

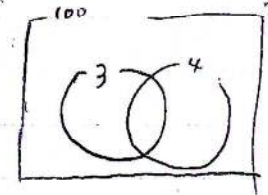
(2) $5C2 \times 2C1 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \times 2 = 20$



$[BCB]$ A, A, A の並べ方 4 通り.
 $\therefore 20 + 20 - 4 = 36$

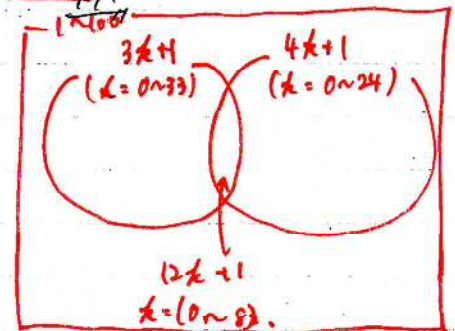
C

$$12 \frac{8}{19}$$



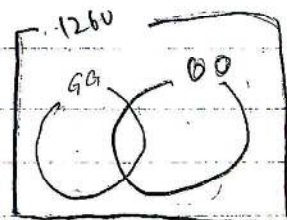
$$34 + 25 - 9 = 50$$

$$33 + 24 - 8 = 49$$



(105) ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯ ⑰ ⑱ ⑲ ⑳ ㉑ ㉒ ㉓ ㉔ ㉕ ㉖ ㉗ ㉘ ㉙ ㉚ ㉛ ㉜ ㉝ ㉞ ㉟ ㊱ ㊲ ㊳ ㊴ ㊵ ㊶ ㊷ ㊸ ㊹ ㊺ ㊻ ㊼ ㊽ ㊾ ㊿

(1) $\frac{7!}{2!2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 1260$ (全体)



GAとGOと重なり合う。GAとGOと重なり合う。GAとGOと重なり合う。

$\frac{6!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 360$ 750 $\frac{6!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 360$ 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120

1260 - (360 + 360 - 120) = 660

(2) (i) $4 \times 3 \times 3 \times 3 = 108$

(ii) (全体) $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$

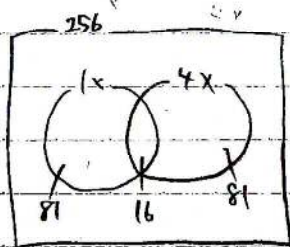
176同じ数外登場しない。 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$256 - 24 = 232$ (通り)

(iii) 1か出るとない。 $3^4 = 81$
4 " $3^4 = 81$

164出るとない $2^4 = 16$

$256 - (81 + 81 - 16) = 110$ (通り)



(iv) $4C_2 \times 3 \times 2 = 36$
 $4C_3 \times 3 = 12$
 $4C_4 = 1$
 $49 \times 4 = 196$ (通り)

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯ ⑰ ⑱ ⑲ ⑳ ㉑ ㉒ ㉓ ㉔ ㉕ ㉖ ㉗ ㉘ ㉙ ㉚ ㉛ ㉜ ㉝ ㉞ ㉟ ㊱ ㊲ ㊳ ㊴ ㊵ ㊶ ㊷ ㊸ ㊹ ㊺ ㊻ ㊼ ㊽ ㊾ ㊿

(3) 3人一緒: 24

1人2人: 72

1人ずつ: $4C1 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$6C3 \times 3! = 6P3$ (残りの3人から最初を考える)
 $6P3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$
場所並べかえ = 120

(106) (1) $9C4 \times 5C5 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$ (通り)

(2) $9C2 \times 7C2 \times 5C5 = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} \times \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} \times 1 = 378$ (通り)

(3) $9C3 \times 6C3 \times 3C3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times 1 = 280$ (通り)

4人人数の7ル-7に注意!

(4) 7ル-7%を117か。

A B C
100 | 00 | 00000 $\frac{9!}{2!2!5!}$

重複してしまうから。

$\frac{9!}{2!2!5!} = 378$

(107)

(1) 0~7の8通り

$8 \times 8 \times 8 = 512$

2日目

§2

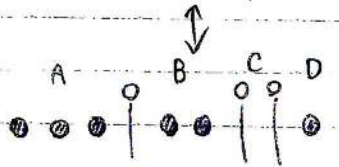
(201) 重複組合せ.

nHr ... n 個のものから r 個を
 重複を許して選ぶ方法

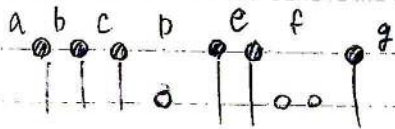
(1) 例 $9C3 = 4H_0 = 7H_3$



と見ると $9C_3$



と見ると $4H_0$ (白玉が3個)



と見ると $7H_3$ (黒玉が3個)

(2) (1) で見たように.

nHr を求めるには、しりしが $n-1$ 本と r 個の玉を
 並べかえればよいので

$$nHr = n+r-1Cr$$

と求められる.

(203)

(1) $x+y+z=10$

(りんご x 個, かんきつ y 個, バナナ z 個) で合計して10.

$$3H_{10} = 12C_{10}$$

$$= \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1}$$

$$= 66$$



しりし 20

11 3

12 3

13 3

3 3 3

2 3 3

11 2

1 2 2

2 2 2

1 1 1

(202)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad 3H_{10} &= 12C_{10} \\
 &= 66 \text{通り}
 \end{aligned}$$

(2) しりしが4つにして袋に入れない果物を置く.

$$\begin{aligned}
 4H_{10} &= 13C_{10} \\
 &= \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\
 &= 286
 \end{aligned}$$

1つも袋に入れない場合をたすから $286-1=285$ 通り

(203)

(2) $x+y+z \leq 10$

$$\begin{aligned}
 4H_{10} &= 13C_{10} \\
 &= 286
 \end{aligned}$$

(3) $1 \leq x < y < z < 10$

$$\begin{aligned}
 8C_3 &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\
 &= 56
 \end{aligned}$$

2~9から3つ選んで

小さい順に x, y, z とする.

$4H_{10}$ を直接求めると.
~~4 5 6 7 8 9 10 11 12 13~~
~~10 9 8 7 6 5 4 3 2 1~~
 $(13C_{10} = 13C_3)$
 5.7. $nHr = r+1H_{n-1}$ とする.
 $nHr =$ (しりし $n-1$ 本, 玉 r 個の並びかた)
 $=$ (しりし r 本, 玉 $n-1$ 個の並びかた)
 $= r+1H_{n-1}$

(4) $1 \leq x \leq y \leq z \leq 10$

$$\begin{aligned}
 3H_9 &= 11H_9 \\
 &= \frac{11 \cdot 10}{2 \cdot 1} \\
 &= 55
 \end{aligned}$$

1~10から, 重複を許して

3つ選ぶのは, 55.

$$10H_3 = 12C_3$$

$$= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$$

(5) $z \leq 10$ とするのは, $z \leq 2$.

$z=1$ のとき $x=y=1$ の1つ.

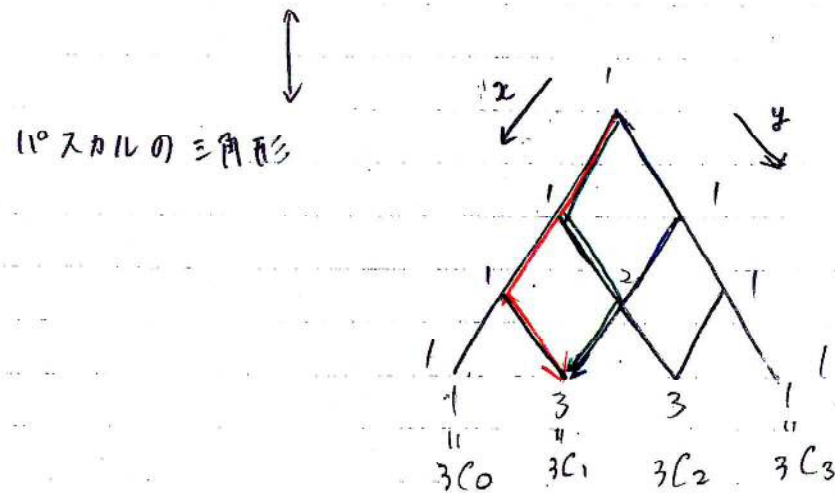
$$\begin{aligned}
 z=2 \text{ のとき } 1 \leq x \leq y \leq 8 \quad 8H_2 &= \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28 \\
 \therefore 39 \text{通り}
 \end{aligned}$$

(204) 二項定理

(1).

① $(x+y)^3$ の展開で x^2y の係数はなぜ $3C_1$ なの?

$(x+y)(x+y)(x+y)$ の3つのカッコで、それぞれどれかを選ぶ。



図の様に、

$$xx^2y + x^2yx + yx^2x = 3x^2y$$

となるので、 x^2y の並べかえの和によって係数は $3C_1$

一般に、 $(x+y)^n$ の展開で、
 $x^k \cdot y^{n-k}$ の係数は、 nC_k と分かる。

(2) $(x+y+z)^5$ の一般項は ${}_5C_r (x+y)^{5-r} \cdot z^r$ とおける。

よって ${}_5C_2 (x+y)^3 \cdot z^2$ - ①

$(x+y)^3$ において ${}_3C_1 x^2 = y^3$

よって ${}_3C_2 \cdot x^2 \cdot y^1$ - ②

①、②より ${}_5C_2 \cdot {}_3C_2 = \frac{5!}{2!3!} \cdot 3 = 30$

(2)

$(x+y+z)^5$ の展開で、 x^2yz^2 の係数は、

x^2yz^2 の並べかえと同じ。

$$\frac{5!}{2!1!2!} = 30$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k x^k y^{n-k}$$

$xx \ x$

$x^2 (x+y)$

(3) (2) の ① ② に $z=1$ を代入すると、

$${}_5C_2 \cdot {}_3C_2 \cdot 1 = 30$$

(205)

(1).

$$(a+b+c)^n = \sum_{\substack{p+q+r=n \\ p,q,r \geq 0}} \frac{n!}{p!q!r!} a^p b^q c^r$$

(1) では $n=6$ で $(a,b,c) = (x^2, x, 1)$ 有り。

$$a^p \cdot b^q \cdot c^r = x^{2p} \cdot x^q \cdot 1^r = x^{2p+q} = x^6 \text{ となるのは}$$

p	0	1	2	3
q	6	4	2	0
r	0	1	2	3

← $p+q+r=6$ に値をつける。

が全ての場合なので、

$$\frac{6!}{0!6!0!} + \frac{6!}{1!4!1!} + \frac{6!}{2!2!2!} + \frac{6!}{3!0!3!}$$

$$= 1 + 30 + 90 + 20$$

$$= 141$$

(2).

$n=4$ で $x^4, x^3, x^2, x, 1$

$$x^4p \cdot x^{3q} \cdot x^{2r} \cdot x^s \cdot 1^t = x^4 \text{ となるのは}$$

p	1	0	0	0	0
q	0	1	0	0	0
r	0	0	1	0	2
s	0	1	2	4	0
t	3	2	1	0	2

$$p+q+r+s+t=4$$

$$\frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$\frac{4!}{2!2!} = 6$$

$$\frac{4!}{1!3!} + \frac{4!}{1!1!2!} + \frac{4!}{1!2!1!} + \frac{4!}{4!} = 4 + 12 + 12 + 1 = 29$$

(3) $n=5$

$$x^{4p} \cdot x^{3q} \cdot x^{2r} \cdot x^s \cdot 1^t = x^5, \quad p+q+r+s+t=4 \text{ を満たすのは}$$

p	1	0	0	0	0
q	0	1	0	0	1
r	0	0	2	1	1
s	1	2	1	3	0
t	2	1	1	1	2

$$\frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!}$$

$$= 12 + 12 + 12 + 14 + 12$$

$$= 52$$

~~$$\frac{5!}{3!} + \frac{5!}{1!1!3!} + \frac{5!}{1!2!2!} + \frac{5!}{1!3!1!} + \frac{5!}{2!1!1!2!} + \frac{5!}{5!}$$~~
~~$$= 20 + 20 + 30 + 30 + 30 + 1$$~~

(206)

1) $n C_k$, $f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n n C_k x^k$

2) $\sum_{k=0}^n n C_k = f(1) = (1+1)^n = 2^n$

⑧ n 個のコイン投げをする場合は

$$2^n = \sum_{k=0}^n n C_k$$

10 個の三角形で考えよう

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

(3)

(208)

1) $f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n n C_k x^k$

1) 別解

n 個のコイン投げ 1 回をするために投げない人もある

または

$$\sum_{k=0}^n n C_k 2^k = f(2) = 3^n$$

$$3^n = \sum_{k=0}^n n C_k 2^k$$

2) $Y = \frac{n C_n}{3^n} + \frac{n C_{n-1}}{3^{n-1}} + \dots + \frac{n C_1}{3^1} + \frac{n C_0}{3^0}$

$$= \sum_{k=0}^n n C_k \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$= f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

3) $Y = \frac{n C_0}{1} + \frac{n C_1}{2} + \frac{n C_2}{3} + \dots + \frac{n C_n}{n+1}$

$$f(x) = (1+x)^n$$

$$= n C_0 x^0 + n C_1 x^1 + n C_2 x^2 + \dots + n C_n x^n$$

$$\int (1+x)^n dx = n C_0 \frac{x^1}{1} + n C_1 \frac{x^2}{2} + n C_2 \frac{x^3}{3} + \dots + n C_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int_0^1 (1+x)^n dx = n C_0 \frac{1}{1} + n C_1 \frac{1}{2} + n C_2 \frac{1}{3} + \dots + n C_n \frac{1}{n+1}$$

$$= \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$= \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

$$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$$

3日目

§3
(昨日の残り)

(208) (3) $nCr = \frac{nPr}{r!}$ を利用して解く.

$$Z = \frac{nC_0}{1} + \frac{nC_1}{2} + \frac{nC_2}{3} + \dots + \frac{nC_n}{n+1}$$

$$= \frac{nP_0}{1 \cdot 0!} + \frac{nP_1}{2 \cdot 1!} + \frac{nP_2}{3 \cdot 2!} + \dots + \frac{nP_n}{(n+1) n!}$$

$$= \frac{1}{1!} + \frac{n}{2!} + \frac{n(n-1)}{3!} + \dots + \frac{n(n-1) \dots 2 \cdot 1}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{n+1} \left(\frac{(n+1)}{1!} + \frac{n(n+1)}{2!} + \frac{n(n+1)(n-1)}{3!} + \dots + \frac{(n+1)n \dots 2 \cdot 1}{(n+1)!} \right)$$

$$= \frac{1}{n+1} (n+1C_1 + n+1C_2 + n+1C_3 + \dots + n+1C_{n+1})$$

(n+1C_0 もない)

$$= \frac{1}{n+1} \{ (1+1)^{n+1} - n+1C_0 \} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

(301)

(2)

$$4H_4 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35 \text{ 通りあるからといって、} \frac{1}{35} \text{ というわけではない。}$$

4つの山から順にとったおえろく.

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{3}{32} \text{ になるだろう。}$$

(問) 右の様に、(※) のように計算できるのは何故か?

$$\begin{aligned}
 nH_r &= n+1Cr \quad (n+1-r+1) \\
 &= \frac{n+1Pr}{r!} \\
 &= \frac{(n+1)(n+2) \dots (n+1-r)}{r(r-1)(r-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}
 \end{aligned}$$

分子を逆に並べれば右の様に.

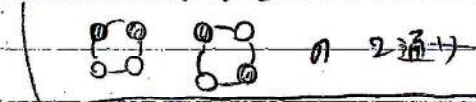
$$= \frac{n(n+1)(n+2) \dots (n+1-r)}{r(r-1)(r-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1} \text{ となる。}$$



(302)

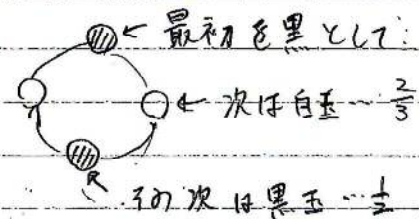
(1) 4個を区別すると、円順列で $3! = 6$ 通り

※ 区別しないと



(2) $P = \frac{1}{A}$ とはいえなさそう.

(3)



Pはおそろく $\frac{1}{4}$.

(303)

(1) 出る目の和が6になるのは

(1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1)

$$\text{よって } \frac{5}{6^2} = \frac{5}{36}$$

(2) 1つ目の目が一致しないのは 6-5=1

$$\text{よって } 1 - \frac{6-5}{6} = \frac{5}{6}$$

3
(1,3) (1,5) (3,5)
(2,4) (2,6) (4,6)
9
(2,1) (2,3) (2,5)
(4,6)

(3) ちんちりんて丁の確率は? → 3/10

昔の人は2つのサイコロの区別がなかったかもしれない。

九半 = 丁 と言われた

下側りは考えない →

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

(304)

(1) 3人目だけがあたりくじ

1, 3

1, 2, 3

2, 3

$$\frac{9}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} \\ \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{8} \\ \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} \\ \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8}$$

$$\frac{9 \cdot 6 \cdot 3 + 3 \cdot 7 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 7 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{210}{720}$$

$$= \frac{7}{24} = \frac{3}{10}$$

9C3

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

15

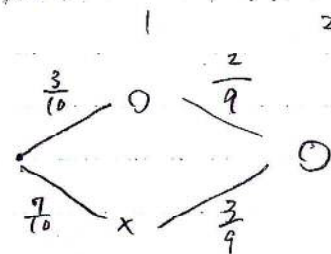
(305)

10本中3本が丁のキコを10人で順に食っていく。

「n人目で当たる」確率を P_n とする。

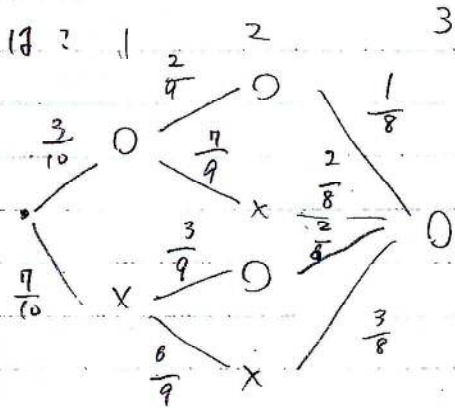
$$P_1 = \frac{3}{10}$$

・ P_2 は?



$$P_2 = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} \\ = \frac{3}{10} \left(\frac{2}{9} + \frac{7}{9} \right) \\ = \frac{3}{10}$$

・ P_3 は?



$$P_3 = \frac{3}{10}$$

0 0 0 0 0 0

$$2 + 6 + 12 + 6 = 24 \\ 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$$

(2) P_5

7人目までであたりくじが、0本、1本、2本でいる。

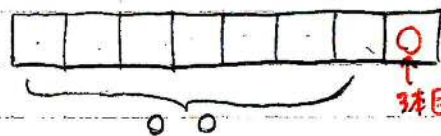
0本のとき $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} \times \frac{3}{3} = 0$

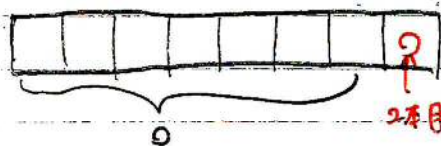
1本のとき $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} \times \frac{2}{3} = 0$

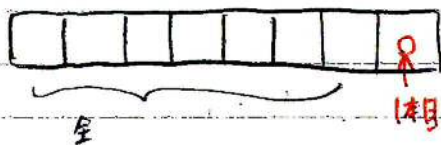
2本のとき $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} \times \frac{1}{3} = 0$

①, ②, ③ あり $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (6 + 12 + 6)}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{1}{30}$

(2) 解説

(i)  $\rightarrow {}^7C_2 \frac{{}^3P_3 \cdot {}^7P_5}{10P_8}$

(ii)  $\rightarrow {}^8C_1 \frac{{}^2P_2 \cdot {}^8P_6}{10P_8}$

(iii)  $\rightarrow {}^9C_0 \frac{{}^1P_1 \cdot {}^9P_7}{10P_8}$

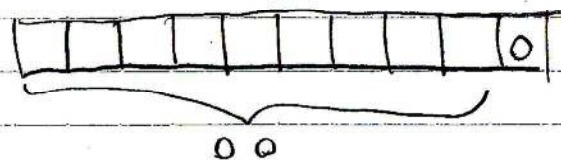
$${}^7C_2 \frac{{}^3P_3 \cdot {}^7P_5}{10P_8} + {}^8C_1 \frac{{}^2P_2 \cdot {}^8P_6}{10P_8} + {}^9C_0 \frac{{}^1P_1 \cdot {}^9P_7}{10P_8}$$

$$= \frac{{}^3P_3 \cdot {}^7P_5}{10P_8} (7 \cdot 6 + 8 \cdot 7 + 1 \cdot 9)$$

$$= \frac{{}^3P_3 \cdot {}^7P_5}{10P_8} \cdot 72$$

$$= \frac{3}{10}$$

(3) P_{10} は?



$${}^9C_2 \frac{{}^3P_3 \cdot {}^7P_7}{10!} = \frac{{}^9C_2}{10C_3} = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8}$$

$$= \frac{3}{10}$$

ということ。実は P_8 も



と見れば、残り 9マスに 0 を 2つ入れればよいから、

$$P_8 = P_{10} = \frac{3}{10} \text{ とすぐ分かる。}$$

$\therefore P_8$ や P_3 を求めるときでさえ、10人全体を見る方が早い。

132. 000XXXXXXX の並びかえを全体と見れば、

これは $10C_3$ 通り全7桁 $\frac{{}^{31}P_7}{10!} = \frac{1}{10C_3}$ の等確率である。

$\therefore n=1 \sim 10$ のどれでも

$$P_n = \frac{{}^9C_2}{10C_3} = \frac{3}{10}$$

(304)

17. 5人目まであたりが3本でている

$$\frac{{}^5C_2}{10C_3} = \frac{10}{120}$$

$$= \frac{1}{12}$$

(4)

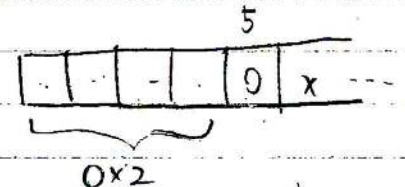
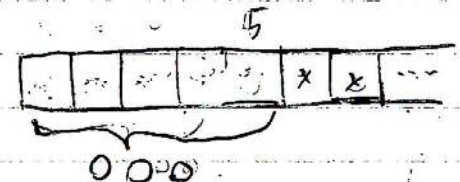
$${}^4C_2 \frac{{}^3P_3 \cdot {}^6P_2}{10P_5}$$

$$= \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}$$

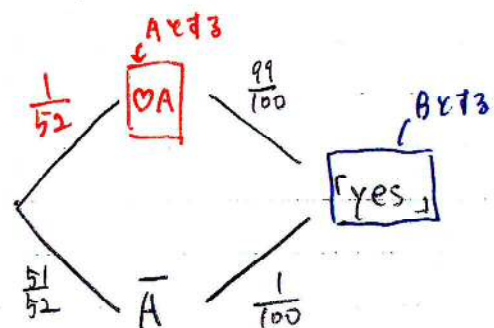
$$= \frac{1}{20}$$

$$\frac{{}^4C_2}{10C_3} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8}$$

$$= \frac{1}{20}$$

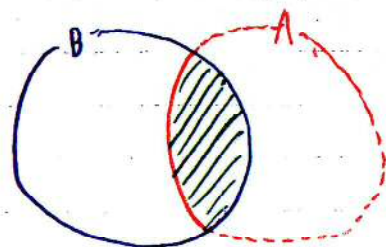


○ 条件付き確率



$$P_B(A) = (\text{Bが実際に起っているときのAの起こる確率})$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{と定める.}$$



$P_B(A)$ は、Bの中だけで考える確率.

(308)

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{1}{52} \cdot \frac{99}{100}}{\frac{1}{52} \cdot \frac{99}{100} + \frac{51}{52} \cdot \frac{1}{100}}$$

$$= \frac{99}{99+51}$$

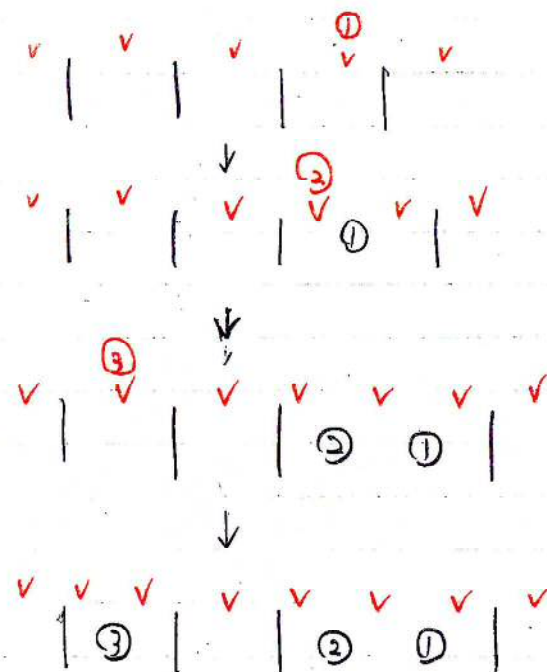
$$= \frac{99}{150}$$

$$= \frac{33}{50} \quad \#$$

おまけ

$$5H_3 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

となる理由を C を使わずに考えると.



4日目

昨日の残り)

(305)
(1) $P(A) = \frac{1}{1000}$

(2) $P_B(A) = \frac{1}{10}$
 $A = \begin{matrix} 1等: 1本 \\ 2等: 9本 \end{matrix} \quad B$
 合計: 1000本

4) 定義通りに解くと.

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/10000}{10/10000} = \frac{1}{10}$$

54.

(401)
(1) $n C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$

(2) $\underbrace{1, 1, 1, \dots, 1, 2}_{n \text{回}}$ と出る時.

$P(\text{1120n回ふって1の目が2回})$
 $\rightarrow 1, 1 \square \square \dots \square$
 $n-2$
 の並べかえ.

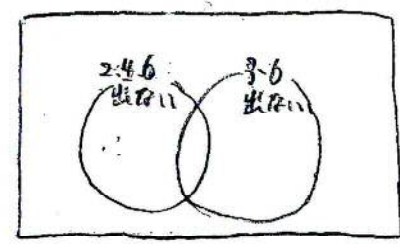
よって $n C_{n-1} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 = n C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^n$

(3) $\underbrace{1, 1, 1, \dots, 1, 3}_n$ と出る. または $\underbrace{1, 1, 1, \dots, 2, 2}_n$ と出る.

よって $n C_{n-1} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 + n C_{n-2} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{6}\right)^2$
 $= n C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^n + n C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^n$

(402)
(1) $n C_n \left(\frac{3}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(2) ~~積が3の倍数である確率は $\left(\frac{1}{3}\right)^n$~~
 $P(\text{出目の積が6と互いに素})$
 $= P(\text{全て1か5の目}) = \left(\frac{1}{5}\right)^n$



(3) $P(\text{積が6の倍数}) = P(\text{積が2の倍数かつ積が3の倍数})$
 $= 1 - \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\}$

(4) 4の倍数にならない. $\rightarrow$ 2, 6 が1回しか出ない
 $\rightarrow$ 4 が1度も出ない.
 4, 2 も6も出ない時. $\left(\frac{2}{6}\right)^n$
 4が出ず, 2または6が1回出る時. $n C_1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{4}{6}\right)^{n-1}$

$1 - \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 n C_1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right\}$

(403)

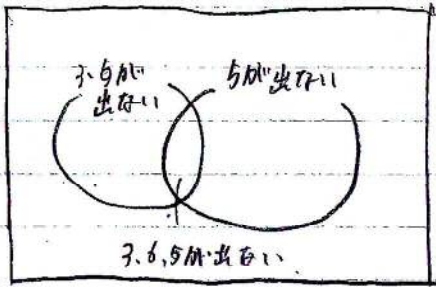
(1) $5 C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 10 \cdot \frac{4}{243}$
 $= \frac{40}{243}$

(2) 表の2イ-1が2枚以上出る $\rightarrow$ 表の2イ-1が0または1枚出るの余事象.

表の2イ-1が0枚の確率は $6 C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$
 " " " $6 C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 6 \left(\frac{1}{2}\right)^6$

$1 - \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^6 + 6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \right\} = 1 - \frac{7}{64}$
 $\frac{57}{64}$

$$(3). \quad 1 - \left[\left(\frac{2}{3} \right)^n + \left(\frac{5}{8} \right)^n - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]$$



(404)

(1) $P(\text{出目の最大値} = 5)$

$$= \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n}{\frac{5}{6} - \frac{4}{6}}$$

(2). p (最大值 5 最小值 2)

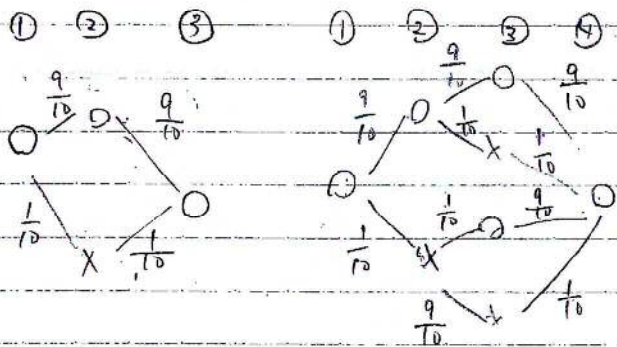
$$= \left(\frac{4}{8}\right)^n - \left(\frac{3}{8}\right)^n - \left(\frac{3}{8}\right)^n + \left(\frac{2}{8}\right)^n$$

$\begin{matrix} \text{AとBとC} \\ 2\text{と3と4と5} \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \text{AとBとC} \\ 2\text{と4} \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \text{AとBとC} \\ 3\text{と5} \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \text{AとBとC} \\ 3\text{と4} \end{matrix}$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(406)

$$P_2 = \frac{9}{10} \quad P_3 = \frac{82}{100} \quad P_4 = \frac{729 + 9 + 9 + 9}{1000} = \frac{756}{1000}$$

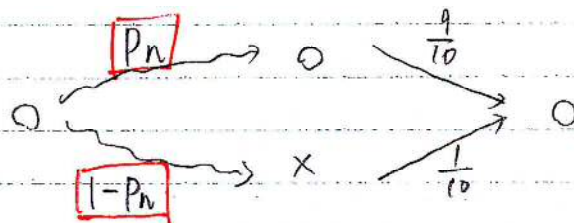


$$P_n = P(\text{n人目に正しく伝わる})$$

511

○ 人 月

人人目

$$n+1 \text{ 人月}$$


$$\textcircled{4} \text{ 5) } P_{n+1} = \frac{9}{10} P_n + \frac{1}{10} (1 - P_n)$$

$$\therefore P_{n+1} = \frac{4}{5} P_n + \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{4}{5}d + \frac{1}{10} \quad (d = \frac{1}{2})$$

$$P_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{4}{5} \left(P_n - \frac{1}{2} \right)$$

$$\begin{matrix} x^{\frac{4}{5}} \hookrightarrow P_1 - \frac{1}{2} \\ x^{\frac{4}{5}} \hookrightarrow P_2 - \frac{1}{2} \\ x^{\frac{4}{5}} \hookrightarrow P_3 - \frac{1}{2} \\ \vdots \\ x^{\frac{4}{5}} \hookrightarrow P_n - \frac{1}{2} \end{matrix} \quad \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

$$P_n - \frac{1}{2} = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \left(P_1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\underline{p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}} \rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

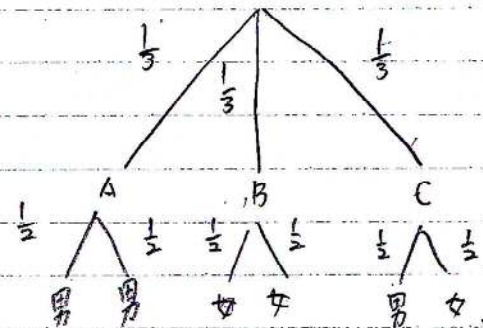
(306) $P \rightarrow (B)$

$$P(\text{女}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B \cap \text{女}) = \frac{1}{8}$$

$$P_*(B_i) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{1}{3}$$



直観

2人の子から
女・女の順

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

女の人は2人。

5日目

5月

(206)

(3) $g(x) = (1+x)^{2n}$
 $= \sum_{k=0}^{2n} {}^{2n}C_k \cdot x^k$ を用いる.

$$\begin{cases} g(1) = {}^{2n}C_0 + {}^{2n}C_1 + {}^{2n}C_2 + {}^{2n}C_3 + \dots + {}^{2n}C_{2n} \\ g(-1) = {}^{2n}C_0 - {}^{2n}C_1 + {}^{2n}C_2 - {}^{2n}C_3 + \dots + {}^{2n}C_{2n} \end{cases}$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} \{g(1) + g(-1)\}$$

$$= \frac{1}{2} (2^{2n} + 0^{2n})$$

$$= \begin{cases} 2^{2n-1} & (n \geq 1) \\ 1 & (n=0) \end{cases}$$

(501)

- (1) $x=1$ のとき $\frac{1}{6}$
- $x=2$ のとき $\frac{1}{6}$
- $x=3$ のとき $\frac{1}{6}$
- $x=4$ のとき $\frac{1}{6}$
- $x=5$ のとき $\frac{1}{6}$
- $x=6$ のとき $\frac{1}{6}$

$$\therefore E(x) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{21}{6}$$

$$= \frac{7}{2}$$

16	26
25	34
34	44
44	53
53	62

- (2) $r=2$ のとき $\frac{1}{36}$
- $r=3$ のとき $\frac{2}{36}$
- $r=4$ のとき $\frac{3}{36}$
- $r=5$ のとき $\frac{4}{36}$
- $r=6$ のとき $\frac{5}{36}$
- $r=7$ のとき $\frac{6}{36}$
- $r=8$ のとき $\frac{5}{36}$
- $r=9$ のとき $\frac{3}{36}$

- $r=10$ のとき $\frac{2}{36}$
- $r=11$ のとき $\frac{1}{36}$
- $r=12$ のとき $\frac{1}{36}$

$$\therefore E(x) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + 6 \times \frac{5}{36} + 7 \times \frac{6}{36}$$

$$+ 8 \times \frac{5}{36} + 9 \times \frac{4}{36} + 10 \times \frac{2}{36} + 11 \times \frac{1}{36} + 12 \times \frac{1}{36}$$

$$= \frac{2+12+24+60+90+84+72+40+22+12}{36}$$

$$= \frac{252}{36} = 7$$

(501)

確率的に変化する数を確率変数という.
 (例) 7120 の目数

確率変数 X に対してその期待値 $E(x)$ を

$$E(x) = \sum_{k=1}^n k \cdot p(x=k)$$
 と定める.

(1) は $x=7120$ 1回の出目だ.

$$E(x) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2}$$

この意味は 6000回 7120 をふれば
 1~6 は 約 1000回ずつ出て、その平均は
 $\frac{1 \times 1000 + 2 \times 1000 + \dots + 6 \times 1000}{6000} = \frac{7}{2}$ と期待される.

(3) もらえる金額を X 万円とす

$$E(x) = 1 \times \frac{1}{6} + 9 \times \frac{1}{6} + 25 \times \frac{1}{6} - 8 \times \frac{1}{6} - 12 \times \frac{1}{6} - 18 \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{35-36}{6}$$

$$= -\frac{1}{6}$$

$-\frac{1}{6}$ 万円 もらうことになる
 $\therefore \frac{1}{6}$ 万円 失うから、参加すべきではない.

○和の期待値

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

(証)

$$E(X+Y) = \sum_{k,l} (k+l) P(X=k, Y=l)$$

$$= \sum_{k,l} k P(X=k, Y=l) + \sum_{k,l} l P(X=k, Y=l)$$

$$= \sum_k k \cdot \sum_l P(X=k, Y=l) + \sum_l l \cdot \sum_k P(X=k, Y=l)$$

$P(X=k)$

$P(Y=l)$

$$= E(X) + E(Y)$$

$$1 \times 0 + 2 \times 1$$

(506)

$$(1) P(X=0) = \frac{1}{(8-1)!}$$

$$= \frac{3! \cdot 5!}{7!}$$

$$= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= \frac{1}{7}$$

M:3 F:5 と

$$3 \times 4 + 4 \times 3$$

$$P(X=2) = \frac{0}{4}$$

必ず

671人0の間!

$$(2) E(X) = \frac{5}{7} \times \frac{4}{6} \times 3 = \frac{10}{7}$$

↑ ↑

右に0 左に0

(3) (1), (2) を用いると $P(X=k) = P_k$ として

$$(1) F1: \frac{1}{7} + 0 + P_1 + P_3 = 1$$

$$(2) F1: 0 \cdot \frac{1}{7} + 2 \cdot 0 + 1 \cdot P_1 + 3 \cdot P_3 = \frac{10}{7}$$

$$\begin{cases} P_1 + P_3 = \frac{6}{7} \\ P_1 + 3P_3 = \frac{10}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = \frac{8}{7} \\ P_3 = \frac{2}{7} \end{cases}$$

8C4

(505) 爆発しない場合を考慮

$$\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times 4^2 = \frac{8}{7}$$

○○○○○○○○

○○○○○○○○

$$E(1) = 0$$

$$E(2) = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}$$

$$E(3) = \frac{3}{70}$$

$$E(4)$$

○○○○○○○○

○○○○○○○○

4つの大薬球 1, 1, 1, 1 を和の期待値を使う

$$1つの球が爆発する確率 = 1 - \frac{4}{7} \times \frac{3}{6}$$

$$= \frac{5}{7}$$

$$\frac{5}{7} \times 4 = \frac{20}{7}$$