１日目

§1 場合の数

$\boxed{\text{心構え}}$

「正しい数え方」を勉強するよりも、自分が誤ったときの原因をしっかり究明しよう!!

▶ 多過ぎたら、重複が生じていることが多い

⇩

どこにどんな重複があるかを明らかにする!!

(ア)「すべてを列挙すること」と
(イ)「すべてを1回ずつ列挙すること」は別の事
という気持ちで臨む。

▶ 少ないときには、数えもれがある。

⇩

思い付きで列挙をしているハズ
系統的に列挙するには、どう考えたらよいかを考える。

▶ 上記を心がけて、はじめて「正解」の「ご」が分かる。

(101) 数え上げの基本

$_nC_r$ や $_nP_r$ などの公式をあてはめる以前の取り組みを学ぶ

(1) ○○○○○ $4!\times2=48$
2 or 4

(2) ○○○○○ (i) 1の位が0のとき $4!$通り
0 or 2 or 4 (ii) 〃 2 or 4 のとき、
$3\cdot3!\times2=36$通り

よって、$4!+36=60$

(3) $p+2q+3r=6$

(i) $p=0$のとき、$2q+3r=6$
これを満たすp,q,rは、$(p,q,r)=(0,3,0)(0,1,0)$
$2q=0$のとき、$p+3r=6$ $(p\neq0)$
これを満たすp,q,rは$(p,q,r)=(3,0,1),(6,0,0)$
$3r=0$のとき、$p+2q=6$ $(p\neq0)(2q\neq0)$
これを満たすq,rは:$(p,q,r)=(2,2,0),(4,1,0)$
(ii) $p>0,q>0,r>0$のとき、
$(p,q,r)=(1,1,1)$
よって、7組

制約多い

制約の多いところからおさえる

$$\begin{cases} r=0 & p+2q=6 \Rightarrow q=0,1,2,3 \\ r=1 & p+2q=3 \Rightarrow q=0,1 \\ r=2 & p+2q=0 \Rightarrow q=0 \end{cases}$$

$4+2+1=7$通り

{順列…ものを並べる順序を区別する捉え方
{組合せ… 〃 しない 〃

a,b,c,d,e の5種の文字から3文字を選ぶ。
次の2つの観点で数え方を変える。
(ア)種の重複をゆるすか否か
(イ)選んだものを並べる順序を区別するか否か

P(5/8) 重複をゆるした順列
P(6/8) 〃 ゆるさない 〃
P(7/8) 重複を 〃 組み合わせ
〃 順列 $_5P_3$

組合せとして同じもの同士でグループ分けする!

abc, acb bca, bac cab, cba	,	abd, adb bad, bda dab, dba	……	cde, ced dce, dec ecd, edc
↑1つと数える		↑1つ		↑1つ

どのグループにも
異なる3文字の順列
が入っており、それは $3!=6$通りある
∴組合せは $\frac{_5P_3}{3!}=\frac{60}{6}=10$通り

一般にn種の異なるものから、
異なるr種を選ぶ組合せの個数を$_nC_r$と書く。

$$_nC_r=\frac{_nP_r}{r!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots1}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

P(8/8) 重複をゆるす組合せ
順列は、$5^3=125$通り、これをグループ分けする!
(ア)3文字すべて異なるとき
順列60通り → $\frac{60}{6}=10$コのグループ
(イ)3文字すべて同じとき
$\boxed{aaa}$, $\boxed{bbb}$, …… $\boxed{eee}$

順列は5通り、1つのグループに順列は1コずつなので、
グループも、$\frac{5}{1}=5$コ

(ウ) 2文字だけ同じとき
順列は、$125-60-5=60$通り
$\boxed{aab,\ aba,\ baa}$, ……, $\boxed{dee,\ ede,\ eed}$
どのグループにも3つずつ順列が入っているので、
グループの個数は、
$\frac{60}{3}=20$コ ある。

(ア)〜(ウ)より、
$\frac{60}{6}+\frac{60}{3}+\frac{5}{1}=10+20+5=35$通り

※ 2で一般公式を学ぶ

${}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=35$通り

▶このように「組合せ」は「順列」を「順序を区別しない」観点でグループ分けしたときの、$\boxed{グループ}$で表される。

▶割り算による数え上げ

区別しない観点を、敢えて区別して数え、それを「本来は同じ」もの同士でグループ分けする。そのときのグループの個数を、組合せのときのように割り算して数える。

(103) ${}_nC_r$の基本

(1) ○○○○○×××を1列に並べた順列の個数？
白石　黒石

▶○○××○○×○や
○×○×○×○○を決定するための指標
たとえば×の位置に着目

▶8コの石置場を1列に並べておき、

1　2　$\boxed{3}$　$\boxed{4}$　5　6　$\boxed{7}$　8

その異なる8ヶ所から、(×印のための)
異なる3つを選ぶと、○×順列がひとつに決まる。
選ぶ場所は区別しないので、
${}_8C_3=\frac{8\cdot7\cdot6}{3!}=56$通りの$\boxed{組合せ}$と、$\boxed{○×順列}$が
$\boxed{置場の}$
1対1に対応する。
∴順列は56通り

(2) 後回し

(3) (1)の順列のうち、黒石同士が隣り合わないのは何通り？
先に○を並べておく。

　○　○　○　○　○
↑1　^2　^3　^4　^5　^6

上記の6ヶ所から**異なる**3ヶ所を選んで、
×を入れることで題意の順列が得られる。
選ぶ順は、区別しないので、
${}_6C_3=20$通り

(2) ××○○○○△△△を1列に並べた順列は？
黒　白　赤

$\boxed{方法1}$

(1)の方法と同様
×○○×○△○△△のような形をつくるには、
文字置場を9コ一列に並べておく。

1　2　3　4　5　6　7　8　9

×の場所の選び方は、${}_9C_2$通りあり、
その各々に対して△の場所の選び方は${}_7C_3$通りずつある。
×○△の順列は、この選び方と1対1に対応するので、
${}_9C_2\times{}_7C_3=36\times35=1260$通り

$\boxed{方法2}$

敢えて9コの石を
(ア) $×_1×_2○_1○_2○_3○_4△_1△_2△_3$
を区別した順列を数えておき、
⇓
(イ)「本来1つとあるもの」同士でグループ分け!!

(ア)は9!通り

××○○○○△△△グループ
$×_1×_2$ ─ $○_1○_2○_3○_4$ ─ $△_1△_2△_3$
　　　　　　　　　　　　 ─ $△_3△_2△_1$
　　　 ─ $○_4○_3○_2○_1$ ─ ⋮
$×_2×_1$ ─ $○_1○_2○_3○_4$ ─ ⋮
　　　 ─ $○_4○_3○_2○_1$ ─ ⋮
……

(イ)で1つのグループには、$2!\times4!\times3!$通りずつ
(ア)の順列が入っている。
よって、$\frac{9!}{2!4!3!}=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{2\times6}=1260$通り

同様にして、重複個数の指定された重複順列

$\left\{\begin{array}{l} p\text{個の同じもの} \\ q \quad \text{〃} \\ r \quad \text{〃} \end{array}\right\}$ 計 $p+q+r$ 個を1列に並べた順列

の個数は、

$\dfrac{(p+q+r)!}{p!\,q!\,r!}$ 通りある

(注) これはもちろん

${}_{p+q+r}C_p \times {}_{q+r}C_q \times {}_rC_r$ に一致します。

方法2 残りをならべる

$\dfrac{8!}{3!\,3!\,2!} = 560$通り

このうちCCが隣り合うのは CC を1文字と考えて、$\dfrac{7!}{3!\,3!\,1!} = 140$通り

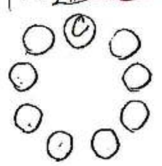
よって、$560 - 140 = 420$通り

(4) ○○○○○○○

${}_7C_2 \times \dfrac{6!}{3!\,3!} = \dfrac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} \times \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 21 \times 20$

$= 420$通り

(5)



Cを固定して考えると

$\dfrac{8!}{5!\,3!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$通り

(104)

(3) AAABBCを1列に並べた順列のうち、B, Cが隣りあっている~~ものは~~所のあるものは？

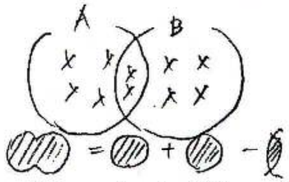
(ア) B, C と並ぶもの AAAB(BC) ← 1文字と考える

$\dfrac{5!}{3!} = 20$通り

(イ) CB と並ぶものも同様に 20通り

~~∴ 20+20 = 40通り~~

そもそも足し算とは



$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(ア) 2つの集合 A $\boxed{\text{または}}$ Bに含まれるものを数えるときに現れる。

(イ) 共通な場所があると、それを引く

⇓

足し算をするときは、共通な場所の有無をチェック！

(ア)と(イ)には $\boxed{BCB}$ と並ぶ場合が $\dfrac{4!}{3!} = 4$通り

AAA

以上により、$20 + 20 - 4 = 36$通り

(105)

(2) ✗ (ア) 4種の文字を使うとき、$4! = 24$通り

(i) (イ) 2 〃 ${}_4C_2 \times ({}_3C_2 - 1) = 12$通り

よって、$24 + 12 = 36$通り

$4 \times 3^3 = 108$通り

(iii) 1, 2, 3, 4から重複をゆるして4つ選び、1列に並べた順列のうち、1も4も入っているものは？

1が入っているを「1が1回出れば、あとは何でもよい」と考えて、1×4^3とか、$4 \times 1 \times 4^3$としてもダメ

↓

これだと、1111が4通りに数えられている。

⇩

「残り」つまり「1が入っていない」の方が簡単！

そこで $\left\{\begin{array}{l} A \cdots 1\text{が入っている順列の集合} \\ B \cdots 4 \quad \text{〃} \end{array}\right.$

とおいて、目標の $n(A \cap B)$ を $\overline{A}$ や $\overline{B}$ などから、求めてゆく

$A \cap B$ … 1も4も入ってる

	A	$\overline{A}$
B	$A \cap B$ (1も4も入っている)	$\overline{A} \cap B$
$\overline{B}$	$A \cap \overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$ (1も4も入っていない)

[1が入っていないか または4が入っていない] $\overline{A} \cup \overline{B}$

ド・モルガンの法則

$\boxed{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}}$ に注意すると、

求めるものは、

$n(A \cap B) = 4^4 - n(\overline{\overline{A \cap B}})$

$= 4^4 - n(\overline{\overline{A} \cup \overline{B}})$ ← ド・モルガン

$= 4^4 - (\underset{1\text{なし}}{n(\overline{A})} + \underset{4\text{なし}}{n(\overline{B})} - n(\overline{A} \cap \overline{B}))$ ← 1も4も入っていない ← 和の法則

$= 4^4 - (3^4 + 3^4 - 2^4) = 110$

２日目

§2 二項定理とその周辺

§2-1 重複組合せ

2-A ○と1の順列解釈

{6コの丸印○ / 〃棒印1} 計9コを1列に並べた順列は、

$\dfrac{9!}{6!\times3!}={}_9C_6={}_9C_3=84$通り

(1) {○をまんじゅう / 1をしきり} と考えて、上の数を解釈するストーリーを2つ作れ。

▶ ⒶⒶ|ⒷⒷ|Ⓒ|Ⓓ

▶ A|ⒷⒷ|C|ⒹⒹⒹⒹ

$\boxed{その1}$ ← 区別あり　区別なし → 個数だけに注目

A, B, C, Dの4人に6コのまんじゅうを(1人0コもゆるして)分配する方法の個数。

$\boxed{その2}$

A, B, C, D 4種のまんじゅうから、種の重複をゆるして、6コを選ぶ組合せの個数。

6コの順序は考えない

⇓

このように、重複組合せは、各種を何個ずつ選ぶかで、指定できる。

A, B, C, Dの個数を各々a, b, c, dとすると、 $a+b+c+d=6$ となる非負整数の組(a, b, c, d)の個数でもある!

(2) {1をポッキー / ○をしきり} と考えたときのストーリーは?

A B C D E F G

▶ |○|○|○|○|○|○|

A B C D E F G

▶ |○○||○○○○

$\boxed{その1}$

A～Gの7人の区別あり人間に、3本の区別なしポッキーを分配する方法の個数。

$\boxed{その2}$

A～Gの7種のポッキーから、種の重複をゆるして、3本を選ぶ組合せの個数。

＜重複組合せの公式＞ n種のものから種の重複をゆるしてr個を選ぶ組合せの個数を、${}_nH_r$と書く。 これは、 ${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$ で計算できる。

証明

選んだr個を○印で表し、1列に並べておく。

第1種 第2種 第3種 第n種

○ ○|○ ○ ○|○

これに、n－1コのしきりを入れて、n種に分類する。

すると、各区画の○印の個数から、組合せを指定できる。

{○…rコ / 1…n－1本} の順列の個数が、

${}_nH_r=\dfrac{(n-1+r)!}{(n-1)!\,r!}={}_{n+r-1}C_r$

である。 $(={}_{n+r-1}C_{n-1})$ 覚えにくい

2-B

(1) Uni, Toro, Ikuraの3種のネタから10個を選んで、折詰をつくる。折詰の作り方は?

(ア) 選ばないネタもゆるす場合

${}_3H_{10}={}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66$通り

うに　とろ　いくら

○○○|○○○○○○○|○○

(イ) どのネタも最低1コは選ぶとき

まず各ネタを1個ずつ選んでおき、あと7個を、0個をゆるして選べばよいから、

${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36$通り

(2) (1)の別のストーリーは?

うに君、とろ君、いくらちゃんに、区別なしのスシ10個の(何個ずつ)を分配する方法

(ア) もらわない人をゆるす

(イ) 1人最低1コはもらう

(202)

(1) りんご、バナナ、夏みかんから10コ選んで袋詰めにする方法は、

$_3H_{10} = {}_{3+10-1}C_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = 66$

(2) (1)の果物で、
「1個以上10個以下」
の袋詰めをつくる方法の個数は?
(1)にくらべて「余りが出てもよい」

りんご	バナナ	夏みかん	~~余り~~ なし
OO	OOOO	OO	O

「なし」という仮想の果物を用意し、
これも含めた4種から10個選ぶ。
「なし」は実際には袋に入れない。
このとき選び方は、
$_4H_{10} = {}_{13}C_{10} = {}_{13}C_3 = 286$通り
だが、「なし10個」は除外される。
よって、求めるものは、$286 - 1 = 285$通り

(203) 非負整数解の個数
次の(1)~(5)の(x, y, z)の個数は?

(1) $x+y+z=10$
(x, y, z)は、
(ア) x, y, z君に10コの区別なしまんじゅうを分配する方法 とも、
(イ) x, y, zの3種のまんじゅうから重複をゆるして、10コ選ぶ組合せ
とも1対1に対応する。
よって、$_3H_{10} = 66$通り

(2) $x+y+z \leqq 10$ ①
(x, y, zの3種のまんじゅうから、重複をゆるして、
10個以下選ぶ組合せ(x, y, z)が1対1に対応する。
(1)にくらべ、残ったまんじゅうが出るので、余りのまんじゅうに
wと名をつける。)
数式で表すには、
$w = 10 - (x+y+z)$ という
変数wを導入する。②

② ⇔ $x+y+z+w=10$ …②'
$\begin{cases} ① \\ ② \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w \geqq 0 \\ ② \end{cases}$
$x, y, z \geqq 0$を考慮すると、②'の非負整数解(x, y, z, w)と、
①の非負整数解(x, y, z)が1対1に対応する。
その個数は、
$_4H_{10} = {}_{13}C_{10} = {}_{13}C_3 = 286$通り

(3) $1 < x < y < z < 10$ となる(x, y, z)は?
例 $(2,3,4), (2,3,5), (3,5,9)$
$2, 3, 4, \cdots, 9$ の8個の数から異なる
3個を選ぶ組合せを考え、その数を小さい順に並べて
x, y, zとおけば、題意のx, y, zがちょうど1つに決まる。
よって、求めるものは、
$_8C_3 = 56$通り

(4) $1 \leqq x \leqq y \leqq z \leqq 10$ となる(x, y, z)は?
1~10の10個の数から重複をゆるして3個を選ぶ(組合せ)
小さい順に並べてx, y, zとおけば、題意のx, y, zが
ちょうど1組決まる。
∴ $_{10}H_3 = {}_{12}C_3 = 220$通り

(5) $1 \leqq x \leqq y \leqq z^3 \leqq 10$ 制約の大きいところから決めてゆく
$1 \leqq z \leqq 2$が必要。
$z=1$のとき、$1 \leqq x \leqq y \leqq 1$ → 1通り
$z=2$のとき、$1 \leqq x \leqq y \leqq 8$ → $_8H_2 = {}_9C_2 = 36$通り
∴ $1 + 36 = 37$通り

§2-2 二項定理, 多項定理

(204) $\boxed{ex}$

(2) $(x+y+z)^5$の展開において ⊗
x^2yz^2の係数を求めよ。
⊗とは、
$(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)$ → $xyzxz = x^2yz^2$ → $xxyxy = x^3y^2$
のように5つの$(x+y+z)$の各々から、
x or y or zを1つずつ取り出して、掛けて得られる単項式を
すべて列挙して足し合わせ、同類項をまとめたもの。
この「取り出した順」に並べた順列 ($xyzxz$ や $xxyxy$ など)
で表される。

特に x^2yz^2 の同類項となる取り出し方は、

$\begin{cases} x\ 2個 \\ y\ 1個 \\ z\ 2個 \end{cases}$ の計5文字を

1列に並べた順列で表され、その個数は、

$$\frac{5!}{2!1!2!} = 30個$$

30個の x^2yz^2 を足し合わせるので、

x^2yz^2 の係数は、$\boxed{30}$

展開式の全体は、p, q, r を整数の変数として、

$$(x+y+z)^5 = \sum_{\substack{p+q+r=5 \\ p\geqq 0, q\geqq 0, r\geqq 0}} \frac{5!}{p!q!r!} x^p y^q z^r$$

$\begin{cases} x = p\ コ \\ y = q\ コ \\ z = r\ コ \end{cases}$ を1列に並べた順列の個数

↑ これを満たす (p, q, r) すべてについての和

多項定理

自然数 n に対して、$(x+y+z)^n$ の展開における $x^py^qz^r$ の係数は、整数 p, q, r が $p+q+r=n$ かつ、$p, q, r \geqq 0$ のときのみ 0でない値 $\dfrac{n!}{p!q!r!}$ となる。

(205) X Y Z と見て多項定理を用いる

(1) $(\boxed{x^2}+\boxed{x}+\boxed{1})^6$ の展開で、x^6 の係数は？

$$(x^2+x+1)^6 = \sum_{\substack{p+q+r=6 \\ p\geqq 0, q\geqq 0, r\geqq 0}} \frac{6!}{p!q!r!} (x^2)^p x^q 1^r$$

$$= \sum_{(\ldots)} \frac{6!}{p!q!r!} x^{2p+q}$$

x^6 の現れる (p, q, r) は

$\begin{cases} p, q, r \geqq 0 & \cdots ① \\ p+q+r=6 & \cdots ② \\ 2p+q=6 & \cdots ③ \end{cases}$

の整数解

$\begin{cases} ② \\ ③ \end{cases}$ を、q, r の連立方程式と見て

解くと、

$\begin{cases} q = 6-2p \\ r = p \end{cases}$ （q, r を p で表した！）

これが①を満たすための p の条件は、

$p \geqq 0 \land 6-2p \geqq 0 \land p \geqq 0$

$\Leftrightarrow 0 \leqq p \leqq 3$

p	$q=6-2p$	$r=p$
0	6	0
1	4	1
2	2	2
3	0	3

各々に対する係数 $\dfrac{6!}{p!q!r!}$ を合計すると、

$$\frac{6!}{6!} + \frac{6!}{4!} + \frac{6!}{2!2!2!} + \frac{6!}{3!3!} = \boxed{141}$$

(2) $\boxed{方法1}$ (1)の真似

$\boxed{方法2}$ ${}_nH_r$ で一発

$\boxed{方法1}$

多項式により

$$(x^4+x^3+x^2+x+1)^4 = \sum_{\substack{p,q,r,s,t\geqq 0 \\ p+q+r+s+t=0}} \frac{4!}{p!q!r!s!t!} x^{4p+3q+2r+s}$$

x^4 の現れる (p, q, r, s, t) は、

$\begin{cases} p, q, r, s, t \geqq 0 & \cdots ① \\ p+q+r+s+t=4 & \cdots ② \\ 4p+3q+2r+s=4 & \cdots ③ \end{cases}$

の整数解

$\begin{cases} ① \\ ② \\ ③ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p, q, r \geqq 0 \\ s = 4-(4p+3q+2r) \\ t = 3p+2q+r \\ 3p+2q+r \geqq 0 \land 4p+3q+2r \leqq 4 \cdots ④ \end{cases}$

〈 s, t の連立と見て解いた

$\boxed{\text{pの係数が大きいので、pから決めてゆこう！}}$

④は、　✓$p, q, r \geqq 0$ から自動的に成立

$p=0$ のとき、$(2q+r \geqq 0 \land)\ 3q+2r \leqq 4$

$\begin{cases} q=0 \text{ ならば } 2r \leqq 4 \quad r=0,1,2 \\ q=1 \text{ ならば } 2r \leqq 1 \quad r=0 \end{cases}$

$p=1$ のとき、$3q+2r \leqq 0$ $\therefore q=r=0$

よって、

$(p, q, r, s, t) = (0,0,0,4,0), (0,0,1,2,1), (0,0,2,0,2)$
$(0,1,0,1,2), (1,0,0,0,3)$

これらに対する、$\dfrac{4!}{p!q!r!s!t!}$

を合計すると、……略……

$\boxed{35}$

方法2 別の見方

$(x^4+x^3+x^2+x+1)^4 = (x^4+x^3+x^2+x+1)(\;\;\text{〃}\;\;)(\;\;\text{〃}\;\;)(\;\;\text{〃}\;\;)$
x^i x^j x^k x^l
を取り出す $(0 \leqq i \leqq 4)$ $(0 \leqq j \leqq 4)$ $(0 \leqq k \leqq 4)$ $(0 \leqq l \leqq 4)$

各$(x^4+x^3+x^2+x+1)$から上図のように
x^i, x^j, x^k, x^lを取り出して、掛けた$x^{i+j+k+l}$
を全て列挙し、足し合わせたものが展開式。
x^4の現れる(i, j, k, l)は

$$\begin{cases} i+j+k+l = 4 & \cdots ① \\ 0 \leqq i, j, k, l \leqq 4 & \cdots ② \end{cases}$$

の整数解

①の非負$(i, j, k, l \geqq 0)$整数解は、
$i, j, k, l \leqq 4$も自動的に満たすので、
重複組合せと同数あり
$_4H_4 = {}_7C_4 = {}_7C_3 = \boxed{35}$
しかしこれは(3)の5乗になると、
これが使えない

(3) $(\quad\quad)^4 = (\quad x^i \quad)(\quad x^j \quad)(\quad x^k \quad)(\quad x^l \quad)$

$$\begin{cases} i+j+k+l = 5 & \cdots ① \\ 0 \leqq i\text{〜}l \leqq 4 & \cdots ② \end{cases}$$

ただし、②を満たさない非負整数解は、$(5,0,0,0)$を
並べ替えた4通りしかない
よって、求める数は、
$_4H_5 - 4 = {}_8C_5 - 4$
$= 56 - 4$
$= \boxed{52}$

３日目

$(p,q,r,s,t)=(0,0,0,4,0),(0,0,1,2,1),(0,0,2,0,2)$
$(0,1,0,1,2),(1,0,0,0,3)$

これらに対する、$\dfrac{4!}{p!q!r!s!t!}$

を合計すると、……略……

$\boxed{35}$

方法2 別の見方

$(x^4+x^3+x^2+x+1)^4=(x^4+x^3+x^2+x+1)(\quad〃\quad)(\quad〃\quad)(\quad〃\quad)$

x^i $\quad x^j$ $\quad x^k$ $\quad x^l$

を取り出す($0\leqq i\leqq 4$) ($0\leqq j\leqq 4$) ($0\leqq k\leqq 4$) ($0\leqq l\leqq 4$)

各$(x^4+x^3+x^2+x+1)$から上図のように
x^i, x^j, x^k, x^lを取り出して、掛けた$x^{i+j+k+l}$
を全て列挙し、足し合わせたものが展開式

x^4の現れる(i,j,k,l)は

$\begin{cases} i+j+k+l=4 & \cdots ① \\ 0\leqq i,j,k,l\leqq 4 & \cdots ② \end{cases}$

の整数解

①の非負($i,j,k,l\geqq 0$)整数解は、
$i,j,k,l\leqq 4$も自動的に満たすので、
重複組合せと同数あり

${}_4H_4={}_7C_4={}_7C_3=\boxed{35}$

しかしこれは(3)の5乗になると、
これが使えない

(3) $(\qquad)^4=(\ x^i\ )(\ x^j\ )(\ x^k\ )(\ x^l\ )$

$\begin{cases} i+j+k+l=5 & \cdots ① \\ 0\leqq i \sim l\leqq 4 & \cdots ② \end{cases}$

ただし、②を満たさない非負整数解は、$(5,0,0,0)$を
並べ替えた4通りしかない
よって、求める数は、

${}_4H_5-4={}_8C_5-4$
$=56-4$
$=\boxed{52}$

〈二項定理〉

$(x+y)^n$の展開式におけるx^ky^l($k,l\geqq 0$, $k+l=n$)の係数は、

$\dfrac{n!}{k!\,l!}={}_nC_k={}_nC_l$

である。よって展開は、

$(x+y)^n=\underbrace{{}_nC_0}_{1}\underbrace{x^0}_{1}y^n+\underbrace{{}_nC_1}_{n}x^1y^{n-1}+\underbrace{{}_nC_2}_{\frac{n(n-1)}{2}}x^2y^{n-2}+\cdots+\underbrace{{}_nC_n}_{1}x^n\underbrace{y^0}_{1}$ ($k=0$, $k=1$, $k=2$, $k=n$)

$=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\,x^ky^{n-k}$

以下、これに、
$y=1$を代入した次の式($f_n(x)$とおく)を考える。

$f_n(x)=(x+1)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$

この式のxに色々な値を代入して等式を作ろう!!

(206)

(2) $P={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n$

$\left(=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\right)$

$=f_n(1)=(1+1)^n=2^n$

組合せ論的な意味を考えて、
上の等式を説明しよう!!

ストーリーは?

(左辺)$=$(n人から0人えらぶ)$+$(n人から1人えらぶ)$+$(n人から2人えらぶ)$+\cdots+$(n人からn人えらぶ)

1通り　n通り　順序は考えない　1通り

$=$ n人から何人かを選ぶ方法の総数

順序は区別する

(右辺)はこれを

出席番号　$2\times2\times2\times\cdots\cdots\times2$

1番の人を選ぶか否か　2番の人を選ぶか否か　n番の人を選ぶか否か

$=2^n$通り

と数えることに相当する。

(3) $Q_n={}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_4+\cdots+{}_{2n}C_{2n}$

$\left(=\sum_{k=0}^{n}{}_{2n}C_{2k}\right)$

偶数番目

▶偶数番目と奇数番目に大きな違いが生じるxとして、
$x<0$、とくに$x=-1$を考える。

$$f_{2n}(-1) = {}_{2n}C_0(-1)^0 + {}_{2n}C_1(-1)^1 + {}_{2n}C_2(-1)^2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n}(-1)^{2n}$$

$$\therefore (-1+1)^{2n} = {}_{2n}C_0 - {}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_2 - \cdots + {}_{2n}C_{2n}$$

一方、

$$(1+1)^{2n} = {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n}$$

この2式を辺々足せば

$$0^{2n} + 2^{2n} = 2(\underbrace{{}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_2 + {}_{2n}C_4 + \cdots + {}_{2n}C_{2n}}_{Q_n})$$

これより、

$$Q_n = \frac{2^{2n}}{2} = 2^{2n-1}$$

▶たとえば $n=2$ $(2n=4)$ のとき、

$$(1+1)^4 = 1+4+6+4+1$$

偶 → $1+6+1=8$
奇 → $4+4=8$

なので、$\boxed{(1+1)^{2n}\text{の半分}}$になるという結果はアタリマエではない。

▶奇数乗なら、

$$(1+1)^3 = 1+3+3+1$$

→ $1+3=4$
→ $3+1=4$

(偶数番目の和) = (奇数番目の和) = (全体の半分)

はアタリマエ。だがこれが偶数乗でも半分になるというのが(206)(3)の結論。

(207)
(1) 委員長の公式

$$\boxed{{}_nC_k \times k = n \times {}_{n-1}C_{k-1} \quad (1 \leqq k \leqq n)}$$

を証明するためのストーリーを作ろう。

$\boxed{\text{左辺}}$
n人のクラスからk人の委員(序列なし)を選ぶ方法は、${}_nC_k$通り。その各々に対して、そのk人から委員長を1人選ぶ方法はk通りずつある。
この委員体制の作り方の個数。

$\boxed{\text{右辺}}$ 上記の数の別の数え方は？
n人のクラスから、1人の委員長を選ぶ方法はn通り。
その各々に対し、残った$n-1$人からヒラ委員を$k-1$人選ぶ方法は、${}_{n-1}C_{k-1}$通りずつある！

特徴

$$\boxed{k} \cdot {}_nC_{\boxed{k}} = n \cdot {}_{n-1}C_{k-1}$$

kに連動して変動する
kが変化しても一定である

(2) $P = 1\cdot{}_nC_1 + 2\cdot{}_nC_2 + 3\cdot{}_nC_3 + \cdots + n\cdot{}_nC_n$
を求めよ。 連動している

委員長の公式より、

$$1\cdot{}_nC_1 = n\cdot{}_{n-1}C_0$$
$$2\cdot{}_nC_2 = n\cdot{}_{n-1}C_1$$
$$3\cdot{}_nC_3 = n\cdot{}_{n-1}C_2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$n\cdot{}_nC_n = n\cdot{}_{n-1}C_{n-1}$$

これらをすべて辺々足すと、
(左辺)$=P$
(右辺)$= n({}_{n-1}C_0 + {}_{n-1}C_1 + {}_{n-1}C_2 + \cdots + {}_{n-1}C_{n-1})$
$= n(1+1)^{n-1}$

$\therefore P = n\cdot 2^{n-1}$

注1 組合せ論的方法アリ
注2 $f_n(x)$を微分する方法もアリ

§3 確率の基本

学校数学で扱う部分

<(経験)科学と数学の関係>

現象の観察や実験 → 法則性を見出す → 数学世界に模型(モデル)をつくる
↓
モデルの数学的分析 → 新現象の予測 → 現象の観察や実験

純粋に数学と言えるのはここだけ

<確率モデルの枠組>

ex 1〜6の目をもつサイコロ1コを1回だけ振る

1 ありうる結果を、それ以上細かく分析しない基本単位に分割する。その1つ1つを標本点と呼び、標本点をすべて集めた集合を

sample space
標本空間と呼ぶ。

ex 「kの目が出る」結果を(k)と書く。

(それ以上細かく分析しない。)

標本空間
$S=\{①,②,③,④,⑤,⑥\}$

標本点

2 Sの部分集合を事象と呼ぶ。

S…全事象

$A=\{②,④,⑥\}$……「偶数の目が出る事象」

$B=\{①,②,③\}$……「3以下の目 〃」

$A\cap B=\{②\}$……「3以下の偶数 〃」

$A\cup B=\{①,②,③,④,⑥\}$……「3以下または偶数が出る事象」

$\emptyset=\{\ \}$ 空事象

▶特に

$\{①\},\{②\},\{③\},\ldots\ldots\{⑥\}$

これ以上細かく分割できない事象を、素事象と呼ぶ。

3 確率測度

Sの各事象$A(A\subset S)$に対し、

(その結果の起こりやすさを表すための)

数値($P(A)$と書く)を割りあてる。

↑probability(確率)

$P(A)$を「Aの起きる確率」と呼ぶ。

ただし、次の条件を満たすようにする。

共通部分がない

(1) すべての$A(\subset S)$に対し、$P(A)\geqq 0$

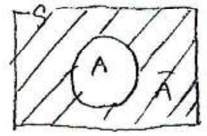
(2) $A\cap B=\emptyset$ ならば $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

(3) $P(S)=1$

注 これらから、次が示せる。

▶ SのうちA以外の部分を$\bar{A}$(Aの余事象)とすると、

$$\begin{cases} S=A\cup\bar{A} \\ A\cap\bar{A}=\emptyset \end{cases}$$



なので、

$P(A)+P(\bar{A})=P(A\cup\bar{A})=P(S)=1$

$\therefore P(\bar{A})=1-P(A)$

▶ $0\leqq P(A)\leqq 1$

▶和の法則

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

ex サイコロはゆがんでいた。

⇩

$$\begin{cases} P(①)=\frac{3}{10} \\ P(②)=P(③)=\frac{2}{10} \\ P(④)=P(⑤)=P(⑥)=\frac{1}{10} \end{cases}$$

$\frac{3+2+2+1+1+1}{10}=1$

一般の事象Aに対しては、Aに含まれる素事象に対する確率の和をあてはめる。

$P(\{②,④,⑥\})=\frac{2}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{4}{10}$

4 ラプラスの確率モデル

現象の側で、各素事象の起こりやすさが等しいと考えられるとき、

数学側では、各素事象に等しい数値をわりあてる。

ex $P(k)=\frac{1}{6}\ (k=1\sim 6)$

このときは確率を個数の比で計算できる。

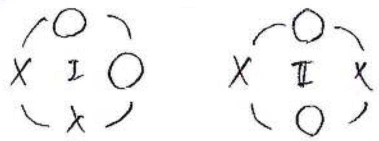
$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ 集合の要素の個数

(302) 等確率性について

$\begin{cases} \text{白石○を2つ} \\ \text{黒石×を2つ} \end{cases}$

計4つを円形に並べる。もし○同士や×同士を区別せず、回転して重なるものを同じと考えると、

パターンは2つしかない。

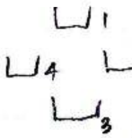


⇩

この2つに$\frac{1}{2}$ずつを割りあてる
モデルは妥当か?

▶ 物理的には、場所も同色の石にも区別がある。

$\left\{\begin{array}{l}\text{置場を } \sqcup_1 \sim \sqcup_4 \\ \text{石を } ○_1 ○_2 ×_1 ×_2\end{array}\right\}$ として、



に4つの異なる石を並べることになる。

⇩

★ $4! = 24$通りの石の順列が$\frac{1}{24}$ずつの等確率とするのが妥当。

このとき　$○○××$ → $2 \times 2 = 4$通り

$○_1○_2$の並べ方　$×_1×_2$の並べ方

Type(Ⅰ)　$×○○×$ →　〃
$××○○$　〃
$○××○$　〃

合計 $4 \times 4 = 16$通り

Type(Ⅱ)　$○×○×$ → $2 \times 2 = 4$通り
$×○×○$ →　〃

合計8通り。よって★なるモデルでは

$$\begin{cases} P(\text{I}) = \dfrac{8}{16+8} = \boxed{\dfrac{4}{4+2}} = \dfrac{2}{3} \\ P(\text{II}) = \dfrac{8}{16+8} = \boxed{\dfrac{2}{4+2}} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$\left\{\begin{array}{l}×_1×_2\text{の区別} \\ ○_1○_2\end{array}\right\}$ をしないモデルでの計算

基本的なモデルの作り方

1. 物理的に区別できそうなものは、全て区別したモデルを基準にとる。
2. 何らかの観点で区別をやめたモデルでは、

その素事象1つ1つに入っている基準モデル1の素事象の個数を見る。

▶ どれにも同じ個数が入っていたら、新モデルでも個数の比で計算できる。

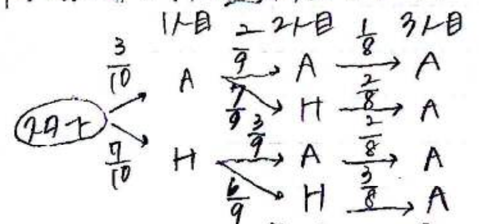
▶ ものによって1の素事象の個数が違うと、ラプラス型にはならない。

(304) $\left\{\begin{array}{l}\text{当たり (A)　3本} \\ \text{はずれ (H)　7本}\end{array}\right\}$ 計10本

の入ったくじ引きの箱から、10人が1本ずつ戻さずに引く。
3本目の当たりが出たら終了。

(1) 3人目が当たる確率 P_1

(中学式計算) 次の遷移図をつくる:



$$\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}+\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}$$

$= \cdots\cdots$

$$= \frac{3 \times 9 \times 8}{10 \times 9 \times 8} = \frac{3}{10}$$

1人目が当たる確率と同じ?

(2) 8人目が当たる確率 P_2

▶ 中学式では大変!

▶ 標本空間を作ろう。

当たり… $A_1 \sim A_3$
はずれ… $H_1 \sim H_7$　とする。

3本目の当たりが出ても、残りのクジを黒子が出て来て全部引くと考え、10本すべてを並べた順列を素事象にとる。
それは$10!$通りあり、これらを等確率として計算する。

8人目が当たっている順列の個数は、

$\sqcup_1 \sqcup_2 \sqcup_3 \cdots\cdots \underset{8}{\sqcup}(A_i) \cdots\cdots \sqcup_{10}$

8番目のA_iの選び方3通りの各々に対して、残りのクジの並べ方は$9!$通りずつあるので、$P_2 = \dfrac{3 \times 9!}{10!} = \boxed{\dfrac{3}{10}}$

別の説明

どのクジが8番目に位置しても残りのクジの並べ方は $9!$ 通り。

∴どのクジも8番目に出る確率は $\frac{1}{10}$ ずつ。

よって、A_1, A_2, A_3 のどれかが出る確率は、

$p_2 = \frac{3}{10}$ ■

何番目の人であっても、あたりを引く確率は、$\frac{3}{10}$ で、クジ引きは公平だ。

(3) 「6人目の人がくじを引けない」とは5人目までに当たりが3本とも出ていることと同値。

そんな順列の個数は、

$\underbrace{{}_5C_3 \times 3!}_{{}_5P_3\text{(あたりの位置)}} \times \underbrace{7!}_{\text{はずれ}}$ 通り

$\therefore p_3 = \frac{5\times4\times3\times7!}{10!} = \frac{5\cdot4\cdot3}{10\cdot9\cdot8} = \boxed{\frac{1}{12}}$

(4) 5人目が3本目のあたりを引く順列は、

$\underbrace{3}_{\text{5番の人のあたり}} \times \underbrace{{}_4C_2 \times 2!}_{{}_4P_2\text{ 残りのあたり}} \times \underbrace{7!}_{\text{はずれ}}$ 通り

$\therefore p_4 = \frac{3\times4\times3\times7!}{10!} = \frac{3\cdot4\cdot3}{10\cdot9\cdot8}$

$= \boxed{\frac{1}{20}}$

４日目

§5 期待値

〈確率変数〉

$S=\{s_1, s_2, s_3, \cdots s_N\}$

を標本空間とする試行において、各結果を
s_kにそれぞれ数値 $X(s_k)$ が割りあてられているとき、
この割りあてXを確率変数と呼ぶ。

(例) 5-A $\boxed{ex}$ ヘンテコ・サイコロ

$k(=1\sim6)$の目が出る、という結果を記号 ω_k と書く。

$\begin{cases}\omega & \text{オメガ 小文字} \\ \Omega & \text{〃 大文字}\end{cases}$

標本空間は、

$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots \omega_6\}$

これに対し、2つの変数 X, Y を、

$\begin{cases} X(\omega_k)=k & (X\text{は「出た目の数」}) \\ Y(\omega_k)=6\text{と}k\text{の最大公約数} \end{cases}$

また、確率は次のヘンテコ。

ω_k	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$X(\omega_k)$	1	2	3	4	5	6
$P(\omega_k)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
$Y(\omega_k)$	1	2	3	2	1	6

$\boxed{\text{事象の表現}}$

XやYの範囲を指定することで、事象を表せる。

「$X\leqq3$」で「3以下の目が出る」事象
「Yは偶数」で「6と目の数のGCDが偶数」である事象

また、これらの確率を、

$\begin{cases} P(X\leqq3) \quad (=\frac{3}{10}+\frac{2}{10}+\frac{2}{10}=\frac{7}{10}) \\ P(Y\text{は偶数}) \quad (=\frac{2}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{4}{10}) \end{cases}$

と書く。

$\boxed{\text{確率分布}}$

確率変数Xの値が

$X=x_1, x_2, \cdots x_n$

であるとき、各x_kに対する確率の値 $P(X=x_k)$
を考えたとき、対応

$x_k \longmapsto P(X=x_k)$

をXの確率分布という。

(1) $\boxed{ex}$ 5-AのYの確率分布は....

↳

Yの値k	1	2	3	6
$P(Y=k)$	$\frac{3+1}{10}=\frac{4}{10}$	$\frac{2+1}{10}=\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

(確率分布表と呼ぶ)

(2) この実験を10万回やったとき、Xの値の平均を予想せよ。

それは、

$$\frac{\overbrace{1+\cdots+1}^{\text{約3万回}}+\overbrace{2+\cdots+2}^{\text{約2万回}}+\cdots\cdots+\overbrace{5+\cdots+5}^{\text{約1万回}}+\overbrace{6+\cdots+6}^{\text{約1万回}}}{10\text{万}}$$

$$=\text{約}\underbrace{\left(\overset{P(X=1)}{\boxed{\tfrac{3}{10}}}\times1+\overset{P(X=2)}{\boxed{\tfrac{2}{10}}}\times2+\overset{P(X=3)}{\boxed{\tfrac{2}{10}}}\times3+\frac{1}{10}\times4+\frac{1}{10}\times5+\overset{P(X=6)}{\boxed{\tfrac{1}{10}}}\times6\right)}_{\text{目の数と、その値になる確率の積の合計}}$$

であると期待される。

そこで、上記の「約」をとりはらった(　)内の量を、
Xの(数学的)平均値や期待値
mean　expectation
と呼び、$E(X)$という記号で表す。

計算すると、

$E(X)=\dfrac{3+4+6+4+5+6}{10}=\dfrac{28}{10}=2.8$

$\boxed{\text{定義}}$

確率変数Xの値が $X=x_1, x_2, \cdots x_n$ のとき

$$E(X)=\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \underset{\text{値}}{x_k}\overset{\text{掛算}}{\cdot}\underset{\text{その値の確率}}{P(X=x_k)}}_{\text{足しあわせる}}$$

(3) $E(Y)$を求めよう。

$\boxed{\text{方法1}}$ 期待値の定義通り

Yの確率分布をまず求める! →(1)で済

$$E(Y)=\underbrace{P(Y=1)}_{\frac{4}{10}}\times1+\underbrace{P(Y=2)}_{\frac{3}{10}}\times2+\underbrace{P(Y=3)}_{\frac{2}{10}}\times3+\underbrace{P(Y=6)}_{\frac{1}{10}}\times6$$

$=\dfrac{4+6+6+6}{10}$

$=\dfrac{22}{10}$

$=2.2$

$\boxed{\text{方法2}}$ 素事象ごとに、(値)×(確率)をつくってたしてもよい。

$$E(Y)=\sum_{k=1}^{6}P(\omega_k)\cdot Y(\omega_k)$$
$$=\frac{3}{10}\times1+\frac{2}{10}\times2+\frac{2}{10}\times3+\frac{1}{10}\times2+\frac{1}{10}\times1+\frac{1}{10}\times6$$
$$=\frac{22}{10}$$

フェアなサイコロを振って
{ 奇目…(目の数)^{2}万円もらう
  偶目…3×(目の数)万円支払う

(501)
(3) もらえる額をZ(支払うときはマイナスで計算)として$E(Z)$を求めよう。

目	1	2	3	4	5	6
Z	+1	-6	+9	-12	+25	-18

(万円)

確率はどの目も$\frac{1}{6}$ずつ

$$E(Z)=\frac{1}{6}\times(1+9+25)+\frac{1}{6}\times(-6-12-18)$$
$$=-\frac{1}{6}\ (\text{万円})$$

お話 次のゲームに参加しますか?
フェアなコイン1枚を表が出るまで投げ続ける。
(表が出たら終了)

$\boxed{\text{もらえる金額は}}$ 確率
さいしょに表が出たら 2円 ← $\frac{1}{2}$
2回目に初めて 〃 2×2円 ← $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$
3 〃 〃 2×2×2円 ← $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$
⋮

もらえる期待金額は、
$$\frac{1}{2}\times2+\frac{1}{4}\times4+\frac{1}{8}\times8+\frac{1}{16}\times16+\cdots+\frac{1}{2^k}\times2^k+\cdots$$
$$=1+1+1+\cdots$$
=無限大

そこで参加費として1回1万円を頂きます!

<期待値の線形性>
{ $X, Y, \cdots$ 確率変数
  $a, b \cdots$ 定数 } のとき、
(i) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
(ii) $E(aX)=aE(X)$
が成立する。$\boxed{\text{理由はp(3/6)}}$ あたりまえ!

まとめて、
$E(aX+bY)$
$=aE(X)+bE(Y)$
と用いる。

cf) 積は一般には
$\boxed{E(XY)\neq E(X)E(Y)}$
2つの単純平均でも
$$\frac{x_1y_1+x_2y_2}{2}\neq\frac{x_1+x_2}{2}\times\frac{y_1+y_2}{2}$$

$\boxed{\text{利用例}}$ フェアなサイコロ1つを2回振る。
2回の目の和をXとするとき $E(X)$を求めよう。

$\boxed{\text{正面からやると…}}$

2回目＼1回目	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	
3	4	5	6	7	8	
4	5	6	7	8		
5	6	7	8			
6	7	8				12

$$\frac{1}{36}\times2+\frac{2}{36}\times3+\frac{3}{36}\times4+\cdots+\frac{6}{36}\times7$$
$$+\frac{1}{36}\times12+\cdots+\frac{3}{36}\times10+\frac{4}{36}\times9+\cdots+\frac{5}{36}\times8$$
となってめんどくさい。

$\boxed{\text{線形性の利用}}$
{ 1回目の目の数をX_1
  2 〃 X_2 } とすると、$X=X_1+X_2$
すると、
$$E(X_1)=E(X_2)=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=\frac{7}{2}$$
である。以上より、
$$E(X)=E(X_1+X_2)$$
$$=E(X_1)+E(X_2)$$
$$=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}$$
$$=7$$

(502)改 1の目の出る確率p
(→出ない確率を $1-p=q$ と略記)
のサイコロを独立に3回振る。
1の目の出た回数をXとするとき、回数の平均値$E(X)$を求めよう。
$\boxed{\text{予想}}$ $p=\frac{1}{10}$で予想してみよう。
(3回振ったとき1の目の出る回数は平均して
およそ、$3\times\frac{1}{10}=0.3$回くらい??
一般のpなら$3p$くらい??)

$\boxed{解1}$ 定義にもとづく計算

$P(X=k)={}_3C_k p^k q^{3-k}$ $(0 \leqq k \leqq 3)$ より

Xの値 k	0	1	2	3
$P(X=k)$	${}_3C_0 p^0 q^3$	${}_3C_1 p q^2$	${}_3C_2 p^2 q$	${}_3C_3 p^3 q^0$

4つの合計は 二項定理で $(p+q)^3=1^3=1$

(この X の確率分布を二項分布と呼ぶ)

これより、

$$E(X)=0\times{}_3C_0p^0q^3+\boxed{1\times{}_3C_1}pq^2+2\times{}_3C_2p^2q+3\times{}_3C_3p^3q^0$$

ただ、組長の公式より $k\,{}_3C_k=3\cdot{}_2C_{k-1}$ $(1\leqq k\leqq 3)$ なので、

$$E(X)=\boxed{3\cdot{}_2C_0}p^1q^2+3\cdot{}_2C_1p^2q^1+3\cdot{}_2C_2p^3q$$
$$=3p({}_2C_0p^0q^2+{}_2C_1p^1q^1+{}_2C_2p^2q^0)$$
$$=3p(p+q)^2$$
$$=\boxed{3p}$$

(今)まあできた…

$\boxed{解2}$ 確率変数の分割

各回の「1の目の出た回数」を3人の人に数えてもらう!

$$\begin{cases} X_1 \cdots 1回目に1の目の出た回数 (0 \text{ or } 1) \\ X_2 \cdots 2回目 \quad〃 \\ X_3 \cdots 3回目 \quad〃 \end{cases}$$ とする。

$\boxed{ex}$

	目		
1回目	1	$X_1=1$	
2回目	3	$X_2=0$	
3回目	1	$X_3=1$	

$\Rightarrow X=X_1+X_2+X_3=1+0+1=2$(回)

すると、$X=X_1+X_2+X_3$ である。

期待値の線形性により

$$E(X)=E(X_1+X_2+X_3)$$
$$=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)$$

である。ここで、

$E(X_k)$ $(k=1,2,3)$ は、

$$E(X_k)=0\cdot P(X_k=0)+1\cdot P(X_k=1)$$
$$=P(X_k=1)=p$$

k回目に1の目が出る確率

であるから、

$$E(X)=p+p+p=3p$$

$\boxed{一般論}$ 二項分布の平均値

1回の基本試行 T_0 で事象 A の起きる確率を p とする。
T_0 を独立に n 回くり返すと、
A の起きる回数 X の平均値は、
$E(X)=np$

(504)

A B C D

つぼ $\sqcup_1$ $\sqcup_2$ $\sqcup_2$ $\sqcup_3$

に対し、玉 ①$_1$ ①$_2$ ② ③ を1個ずつ順に無作為に入れる。

X … つぼの数と玉の数字が一致している個数

⇩

$E(X)$ を求めよう。

$\boxed{定義通りの計算}$

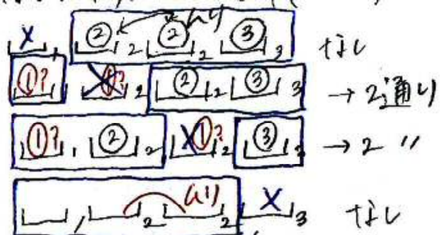
玉4つを全て区別し、一列に並べた順列(順に図のA, B, C, Dに入れる)を事象にとると、それは $4!$ 通り。

これを等確率として計算。

Xの確率分布

$\boxed{X=4}$ なる入れ方はない。$P(X=4)=0$

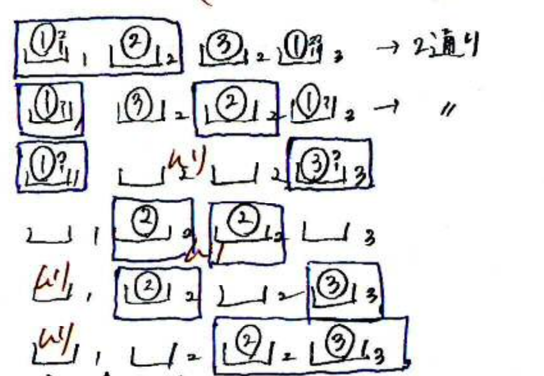
$\boxed{X=3}$



$\therefore P(X=3)=\frac{4}{24}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

(①$_1$と①$_2$を区別しないモデルによる計算)

$\boxed{X=2}$



$P(X=2)=\frac{4}{24}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

$\boxed{X=1}$ アト回し

$\boxed{X=0}$ ぜんぶちがう

② − ③ − ①′ − ①″ → 2
　＼ ①′ − ③ − ①″ → 2
③ − ①′ − ①″ − ② → 2
} 計6

$P(X=0)=\frac{6}{24}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

$\boxed{X=1}$

$24-(0+4+4+6)=10$通り

$\therefore P(X=1)=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$

$E(X)$

$=0\times\frac{3}{12}+1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{2}{12}+3\times\frac{2}{12}+4\times\frac{0}{12}$

$=\boxed{\frac{5}{4}}$

〈確率変数の分割〉

つぼAが割れた個数を X_A (0 or 1)
　〃B　〃　X_B (〃)
　〃C　〃　X_C (〃)
　〃D　〃　X_D ( )

とすると、

$X=X_A+X_B+X_C+X_D$

$\therefore E(X)=E(X_A+X_B+X_C+X_D)$

$=E(X_A)+E(X_B)+E(X_C)+E(X_D)$

ここで……

$E(X_A)=0\times P(X_A=0)+1\cdot P(X_A=1)$

$=P(X_A=1)$　(Aが割れる確率)

ここで、Aにやってくる玉は、①$_1$ ～ ③ それぞれ $\frac{1}{4}$ ずつ の確率 なので、割れる玉①$_1$ or ①$_2$ の来る確率は $P(X_A=1)=\frac{2}{4}$

$E(X_B)=\cdots\cdots=P(X_B=1)$

$=\left[\begin{array}{l}\text{つぼBに玉②}\\\text{が来る確率}\end{array}\right]=\frac{1}{4}$

C, D もBと同様である。

$\therefore E(X)=\frac{2+1+1+1}{4}$

$=\boxed{\frac{5}{4}}$

5日目

別の説明

どのクジが8番目に位置しても残りのクジの並べ方は $9!$ 通り。

∴ どのクジも8番目に出る確率は $\frac{1}{10}$ ずつ。

よって、A_1, A_2, A_3 のどれかが出る確率は、

$P_2 = \frac{3}{10}$

何番目の人であっても、あたりを引く確率は、$\frac{3}{10}$ で、クジ引きは公平だ。

(3) 「6人目の人がくじを引けない」とは5人目までに当たりが3本とも出ていることと同値。

そんな順列の個数は、

$\underbrace{{}_5C_3 \times 3!}_{{}_5P_3\text{(あたりの位置)}} \times \underbrace{7!}_{\text{はずれ}}$ 通り

$\therefore P_3 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 7!}{10!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \boxed{\frac{1}{12}}$

(4) 5人目が3本目のあたりを引く順列は、

$\underbrace{3}_{\text{5番の人のあたり}} \times \underbrace{{}_4C_2 \times 2!}_{{}_4P_2\text{ 残りのあたり}} \times \underbrace{7!}_{\text{はずれ}}$ 通り

$\therefore P_4 = \frac{3 \times 4 \times 3 \times 7!}{10!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8}$

$= \boxed{\frac{1}{20}}$

3-C 積法則

$\frac{1}{6}$ ずつの確率で、目の出るサイコロを1回ふる。

(1) $\underbrace{(\underbrace{\text{3以下の偶数}}_{\to 2}\text{の目が出る確率})}_{\frac{1}{6}} \neq \underbrace{(\underbrace{\text{偶数}}_{\to 2,4,6}\text{の目が出る確率})}_{\frac{1}{2}} \times \underbrace{(\underbrace{\text{3以下}}_{1,2,3}\text{が出る確率})}_{\frac{1}{2}}$

$S = \{①, ②, \cdots, ⑥\}$

$A = \{②, ④, ⑥\}$

$B = \{①, ②, ③\}$

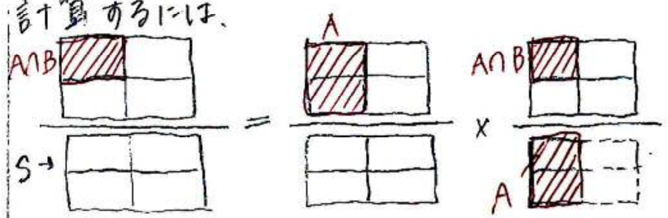
	A	$\bar{A}$
B	②	①, ③
$\bar{B}$	④, ⑥	⑤

$$\begin{cases} (\text{左辺}) = P(\underset{\text{偶で3以下}}{A \cap B}) \\ (\text{右辺}) = P(\overset{\text{偶}}{A})\,P(\overset{\text{3以下}}{B}) \end{cases}$$

であるが、(左辺)を

$P(A) \times \cdots$ と

計算するには、



$P(A \cap B) = P(A) \times \underbrace{\frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$

ここは $P(B)$ ではなく「Aの中でBが占める割合」

$= \frac{3}{6} \times \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}$ ② ／ ②, ④, ⑥

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$

Aの中では3以下の割合は $\frac{1}{2}$ ではない

この $\frac{1}{3}$ を「偶数が出た条件下で3以下の目が出る条件付確率」という。

一般論

2つの事象 A, B に対し

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ ← Aの中でBの占める割合

を条件Aのもとでの B の条件付確率と呼ぶ。

注) 素事象すべてが高確率ならば、個数の比で、

$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$

としてもよい。

上記の分母を払うと

積の法則

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$

(2) $C = \{①, ②\}$ …… 2以下が出る事象

とすると、

$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$

となることを確認せよ。

$A = \{②, ④, ⑥\}$

$A \cap C = \{②\}$

$P(A \cap C) = \frac{1}{6}$

$P(A) \cdot P(C) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$

一致

↑ 条件Aがなくてよいのはなぜ？

	A	$\bar{A}$
B	②	①,③
$\bar{B}$	④⑥	⑤

	A	$\bar{A}$
C	②	①
$\bar{C}$	④,⑥	③⑤

$$\begin{cases} P_A(B) = \frac{1}{3} \\ P_{\bar{A}}(B) = \frac{2}{3} \\ P(B) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Aの有無がBの確率に影響する。

$$P_A(C) = P_{\bar{A}}(C) = P(C) = \frac{1}{3}$$

Aが起きようが起きまいが、Cの確率は変わらない。

上の例で

$\begin{cases} \text{事象AとCは独立} \\ 〃\ \text{AとB}\ 〃\ \text{ではない} \end{cases}$

と言う。

一般論

2つの事象A,Bに対し、AとBが独立であるとは、

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

が成立することを言う。

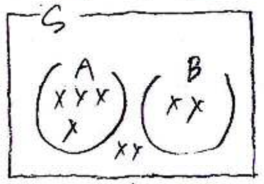
これが成立するとき、

$\begin{cases} P_A(B)=P(B)\text{や} \\ P_B(A)=P(A)\text{が} \end{cases}$

成立している。

3-D 事象の排反性

2つの事象A,Bに対し、



$A\cap B=\emptyset$ のとき、AとBは排反であるという。

これは、

(和) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

において、AとBが排反なら $P(A\cap B)=0$ なので、

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

という使い方をする。

(注) AとBが排反なら、

$P_A(B)=0$ であり、AはBの確率に影響ある。

⇓

AとBは独立ではない。

3-E ウィルス検査

実際に感染している人…… $\frac{1}{10000}$

↑この人である事象をIとする。

検査で正しく診断する確率…… $\frac{99}{100}$

陽性と出る事象…⊕

陰性 〃 ……⊖

問題のデータ

$$P(I)=\frac{1}{10000}$$

$$P_I(\oplus)=\frac{99}{100},\quad P_I(\ominus)=\frac{1}{100}$$

$$P_{\bar{I}}(\oplus)=\frac{1}{100},\quad P_{\bar{I}}(\ominus)=\frac{99}{100}$$

このとき

$P=$[陽性の人が感染してる確率]

条件　　条件つき確率

$$=P_{\oplus}(I)=\frac{P(I\cap\oplus)}{P(\oplus)}$$

を求めよう!!

カルノー図

	I	$\bar{I}$
⊕	$I\cap\oplus$	$\bar{I}\cap\oplus$
⊖	$I\cap\ominus$	$\bar{I}\cap\ominus$

上図の ■ / □ を求めたい。

■ $=P(I\cap\oplus)$

$=P(I)\times P_I(\oplus)$

カンセンしてる　カンセンしてる人が⊕になる

$=\frac{1}{10000}\times\frac{99}{100}$

分母の残り部分は、

$$P(\bar{I}\cap\oplus)=P(\bar{I})\times P_{\bar{I}}(\oplus)$$

$$= \frac{9999}{10000} \times \frac{1}{100}$$

ゆえに

$$p = \frac{P(I \cap ⊕)}{P(⊕)}$$

$$= \frac{P(I \cap ⊕)}{P(I \cap ⊕) + P(\bar{I} \cap ⊕)}$$

$$= \frac{\frac{1}{10000} \times \frac{99}{100}}{\frac{1}{10000} \times \frac{99}{100} + \frac{9999}{10000} \times \frac{1}{100}}$$

$$= \frac{99}{99 + 9999}$$

$$= \frac{1}{1 + 101} = \frac{1}{102}$$

$$\therefore p = \boxed{\frac{1}{102}}$$

陽性と出ても感染確率は1%弱

§4 独立反復試行・確率の漸化式

§4-1 独立反復試行（ベルヌーイ試行）

1つの基本試行 T_0 において、事象 A に注目する。
起きる確率を p とする。
「試行 T_0 を $\boxed{独立に}$ n回くり返す」
試行を考える。↑異なる回の A や $\bar{A}$ が独立
（各回が他の回の確率に影響しない。）

このとき、A の起きた回数が（n回中）k回である確率を p_k とする。

$\boxed{ex}$ $n=5$ とする。 $\begin{cases} A \cdots ○印 \\ \bar{A} \cdots ×印 \end{cases}$
$k=2$

とすると、5回くり返した結果は、
○××○× のような
○×の長さ5の順列で表される。

⇩

▶ ○×の順序は区別ある。
▶ 個々の順列の確率は、○の個数だけで決まる。
○が2個なら、
順列ひとつにつき
確率 $p^2(1-p)^3$
▶ ○○×××の順列は、

$$\frac{5!}{2!3!} = {}_5C_2 = {}_5C_3 \text{ 通り}$$

あるので、これらのどれかが起こる確率 p_2 は、

$$p_2 = {}_5C_2 \times p^2(1-p)^3$$
$$= 10p^2(1-p)^3$$

一般に

T_0 の独立な n回のくり返しで、A がちょうど k回起きる確率は、

$${}_nC_k\, p^k (1-p)^{n-k}$$
$$(0 \leqq k \leqq n)$$

注「サイコロ10個を1度に振る」のは、「くり返し」には見えないけれど、（たとえば、1の目を○印として）

サイコロ

その1	その2	その3	- - - - - - -	その10
○	×	○	- - - - - - - -	×
○	○	×	- - - - - - - -	×
⋮	⋮	⋮	- - - - - - - -	⋮

サイコロは物理的には区別があるので、
上図のように順列で捉える。

⇩

1の目がちょうど3個でる確率も、

$$ {}_{10}C_3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^7 $$

これが必要!

(401) 1〜6が等確率で出るサイコロを(独立に)
くり返し、n回投げる。($n \geqq 2$)

(1) 1がちょうど2回出る確率は、

$$ {}_nC_2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} $$

(2) 目の和が$n+1$
となるのは、$\begin{cases} 1\text{が } n-1\text{回} \\ 2\text{が } 1\text{回} \end{cases}$
出るときなので、確率は、

$$ \underbrace{{}_nC_1}_{n} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 = \frac{n}{6^n} $$

(3) 目の和が$n+2$
(ア) 1が$n-1$回, 3が1回
確率は、

$$ {}_nC_1 \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{1}{6^n} $$

(ア)と(イ)は排反なので、(ア)or(イ)となる確率は、

$$ (ア)+(イ) = \frac{n(n+1)}{2 \times 6^n} $$

(402) 「または」の確率

どの目も等確率で出る
(3) フェアなサイコロを1コ独立にn回くり返し振る
出た目の積が6の倍数である確率pを求めよ。

目の積が6の倍数 ⟺ $\begin{cases} \text{積が偶数} & \leftarrow \text{事象Aとする} \\ \text{かつ 積が3の倍数} & \leftarrow 〃\ B\ 〃 \end{cases}$

⇩

$p = P(A \cap B)$

▶ $P(A) = ?$
直接考えると、
偶目が $\begin{cases} \text{ちょうど} 1\text{回} \\ 〃\ 2\text{回} \\ \vdots \\ 〃\ n\text{回} \end{cases}$
の確率
余事象$\overline{A}$は「偶目が1回も出ない」
なので、$P(\overline{A}) = \left(\frac{3}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ と簡単。

▶ 同様にBも余事象の方が簡単で、
$P(\overline{B})$ =「3or6が1度も出ない確率」

$$ = \left(\frac{4}{6}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n $$

▶ $P(A \cap B)$より、$P(\overline{A \cap B})$の方が簡単そう!

	A	$\overline{A}$
B	$A \cap B$	$\overline{A} \cap B$
$\overline{B}$	$A \cap \overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$

(答案)

$$ \begin{aligned} P(A \cap B) &= 1 - P(\overline{A \cap B}) \quad \text{↓ドモルガン} \\ &= 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= 1 - (\underbrace{P(\overline{A})}_{1,3,5\text{ばかり}} + \underbrace{P(\overline{B})}_{1,2,4,5\text{ばかり}} - \underbrace{P(\overline{A} \cap \overline{B})}_{1,5\text{ばかり}}) \\ &= 1 - \left\{\left(\frac{3}{6}\right)^n + \left(\frac{4}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{6}\right)^n\right\} \\ &= \boxed{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n} \end{aligned} $$

(4) 目の積が4の倍数
余事象は次の(ア)or(イ)
(ア) 目の積が奇数
(イ) 〃 2でちょうど1回だけ割り切れる。
(ア)…$\left(\frac{3}{6}\right)^n$
(イ)…2or6がちょうど1回, 残りの$n-1$回は、
奇数が出るとき。
確率は、 ${}_nC_1 \times \frac{2}{6} \times \left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}$

∴ 求めるものは、

$1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=1-\frac{2n+3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

403〜405→(70)

§4-2 確率漸化式

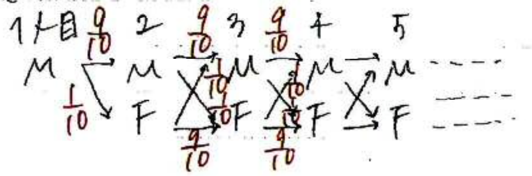
(406) 生まれた子の性別を伝える伝聞ゲーム

▶1人目には正しく「男」と伝えた。

▶1回の伝言につき確率 $\frac{1}{10}$ で性別を逆に伝える。

n人目に「男」と伝わる確率 p_n を求めます！

{ 男…M, 女…F } として観察



たとえば5人目がMとなる伝わり方は、

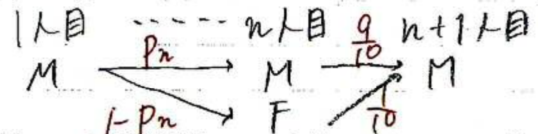
→→→→ だけではなく、

など、色々あって、複雑。

一気に求めるのは難しい。

だが、p_4 が分かっていたら、p_5 を求めるのは簡単！

(1) (答案)



上の状態遷移図により、

$p_{n+1}=p_n\times\frac{9}{10}+(1-p_n)\times\frac{1}{10}$

∴ $p_{n+1}=\frac{4}{5}p_n+\frac{1}{10}$ …①

(2) ①を p_1 のもとで解く。①を

$p_n-\alpha=\frac{4}{5}(p_n-\alpha)$ …② (αは定数)

と変形したい。

①−②を作ると、

$\alpha=\frac{4}{5}\alpha+\frac{1}{10}$

∴ $\alpha=\frac{1}{2}$

∴①は、

$p_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{4}{5}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$

と変形できる。

∴ $\left\{p_n-\frac{1}{2}\right\}$ は、公比 $\frac{4}{5}$ の等比数列で、

$p_n-\frac{1}{2}=\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\left(p_1-\frac{1}{2}\right)$ $(n\geqq1)$

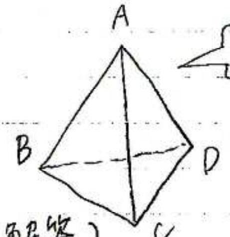
$p_1=1$ を代入して、

$\boxed{p_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\ (n\geqq1)}$

(nを大きくすると、p_nは$\frac{1}{2}$に近づく!!)

(407)

(1)



さいしょ($n=0$)

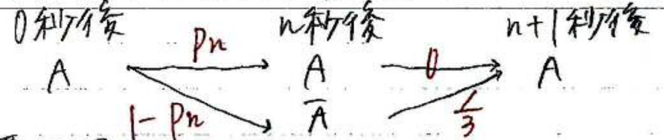
1秒に1回 $\frac{1}{3}$ ずつの確率で隣りの頂点へ移るGがいる。

n秒後、GがAにいる確率 p_n は？

(解答)

Aにいることを A

BorCorDにいることを $\bar{A}$ と書く



上の遷移図より、

$p_{n+1}=p_n\times0+(1-p_n)\times\frac{1}{3}$

$p_{n+1}=-\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}$ …①

$\alpha=-\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{3}$ の解は $\alpha=\frac{1}{4}$

①の両辺から $\frac{1}{4}$ を引くと、

$p_{n+1}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{4}\right)$

ゆえに、

$p_n-\frac{1}{4}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-0}\left(p_0-\frac{1}{4}\right)$

$p_0=1$ を代入し整理すると、

$p_n=\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\cdot\frac{3}{4}$ (nを大きくすると、p_nは$\frac{1}{4}$に近づく!!)

$\left(=\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{4}\right)$