

1日目

§1. 場合の数

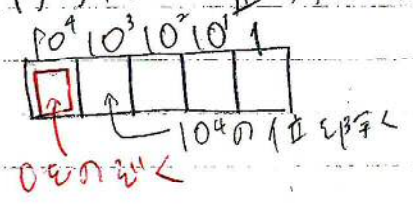
数を上げの方法 ... もれなく、重複なく

① 特定の桁のつぎの桁から数える。

(例) (102)(2)

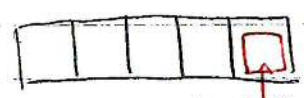
0, 1, 2, 3, 4 を重複を許さず並べる

(1) 5桁の整数は何個?



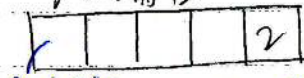
$4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96 \text{通り}$

(2) 5桁の偶数は何個?



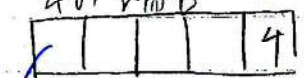
一の位が 0 or 2 or 4

2の場合



$0 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$

4の場合



$0 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$   
 $\therefore 18 + 18 \times 2 = 60 \text{通り}$

0の場合



$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

(101) 1, 2, 3 のおみくし 2 枚で表す

- (1)  $6 = 1+1+1+1+1+1 \leftarrow (6, 0, 0)$
- $= 1+1+1+1+2 \leftarrow (4, 1, 0)$
- $= 1+1+2+2 \leftarrow (2, 2, 0)$
- $= 2+2+2 \leftarrow (0, 3, 0)$
- $= 1+1+1+3 \leftarrow (3, 0, 1)$
- $= 1+2+3 \leftarrow (1, 1, 1)$
- $= 3+3 \leftarrow (0, 0, 2)$

$\therefore f(6) = 7$

$$(2) \begin{cases} p+2q+3r=6 \\ p, q, r \text{ は } 0 \text{ 以上 の 整数} \end{cases}$$

とあるが (p, q, r) の総数は?

これは (1) の数系上げを考えている!

(r) を考えるたび (1) の 420711 になる。

制約条件が r (一番数の上の桁) のみ

$$r=0 \text{ のとき } p+2q=6$$

$$\therefore \begin{cases} q=0, 1, 2, 3 \\ p=6, 4, 2, 0 \end{cases} \quad 47$$

$$r=1 \text{ のとき } p+2q=3$$

$$\therefore \begin{cases} q=0, 1 \\ p=3, 1 \end{cases} \quad 27$$

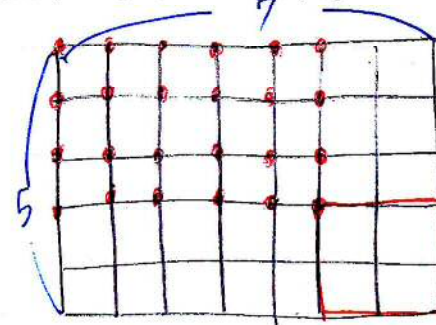
$$r=2 \text{ のとき } p+2q=0$$

$$\therefore \begin{cases} q=0 \\ p=0 \end{cases} \quad 17$$

72

② 並びの場合分けして数える

(111) (102) (1)



正方形はいくつ含まれる?

$$1 \text{ 辺のもの} = 4 \times 4$$

$$2 \quad = 3 \times 3 \quad \leftarrow \text{左上の頂点の位置}$$

$$3 \quad = 2 \times 2$$

$$4 \quad = 1 \times 1$$

$$5 \quad = 1 \times 1$$

$$\therefore 35 + 24 + 15 + 8 + 3 = 85 \text{ 通り}$$

③ 111 順列の組合せを数える

NP: 異なる n 個のものから k 個を取り並べたもの (順列) の総数

NC: 異なる n 個のものから k 個を取り組 (組合せ) の総数

[但し NP0 = 1, NC0 = 1 と定める]

これらの計算の仕方は...

(103) (11)

(i) abcde の 5 文字から重複を許して 3 つ取り並べる

1 2 3

1 2 3

$$\therefore 5 \times 5 \times 5 = 125 \text{ 通り}$$

(ii) 重複を許さず 3 つ取り並べる

1 2 3

1 2 3

$$\therefore 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ 通り } (= 5P_3)$$

(iii) 重複を許さず 3 つ取り組

これは (ii) の 111 順列にリレーする

組合せ

111 順列

{a, b, c}

並べ方

(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)

111 順列は 6 つ対応する  
(3! = 6 通り)



他の組からも、「3文字の並び方」により3通りずつの順列が生じる。

$$\therefore \underbrace{(5C3)}_{\text{組合せの総数}} \times 3! = \underbrace{5P3}_{\text{順列の総数}}$$

$$5C3 = \frac{5P3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

四 一般化する

$$(nC_r) \times (r!) = nPr \quad r \text{ 個}$$

$$\begin{aligned} nCr &= \frac{nPr}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)}{r(r-1)(r-2) \cdots 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)}{r!} \cdot \frac{(n-r) \cdots 2 \cdot 1}{(n-r) \cdots 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \end{aligned}$$

(104)

(1) 男子4人、女子3人を並べる

女子がバラバラに合れないのは何通り?

男子:  $m_1, m_2, m_3, m_4$

女子:  $f_1, f_2, f_3$  とする

女子がバラバラに合れない  $\Rightarrow$  先に男子を並べる

$\downarrow m_1 \quad \downarrow m_2 \quad \downarrow m_3 \quad \downarrow m_4 \quad \downarrow$

間を男女両端の  $\downarrow \sim \downarrow$  6箇所  $\sim$  女子3人を入れる。

$$4! \times 5P3 = 24 \times 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1440$$

(2) 

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|   |   |   |   |   |   |

1~5 を重複をゆるして6個並べる

(i) 1が5回だけ2回現れるのは

$$6C2 \times 1^2 \times 4^4 = 15 \times 256 = 3840$$

1の  
置場所 1が  
入る 残り4箇所

(ii) 偶数だけが5回だけ3回現れるのは

$$6C3 \times 2^3 \times 3^3 = 4320$$

偶数の  
置場所 偶数  
が3つ の残り3箇所  
に奇数

(3) a, a, a, b, b, c を並べる

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|   |   |   |   |   |   |

$$6C1 \times 5C2 \times 3C3 = 60$$

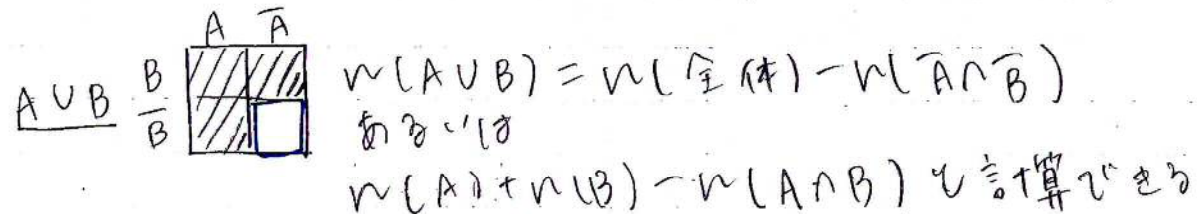
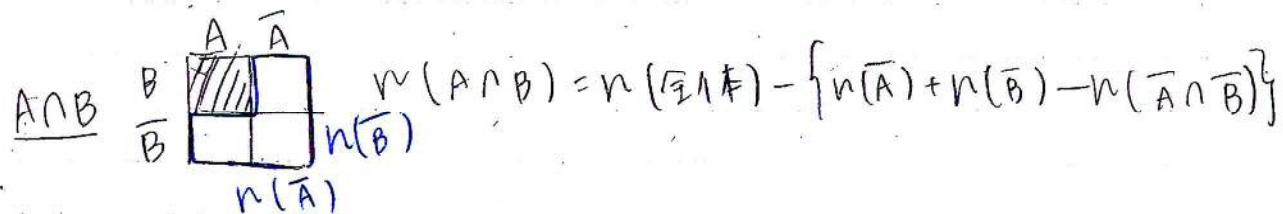
cの  
入れ場所 aの  
入れ場所 aの  
入れ場所



④「AかつB」「AまたはB」「Aでない」の数え上げ

$$A \cap B \quad A \cup B \quad \overline{A}$$

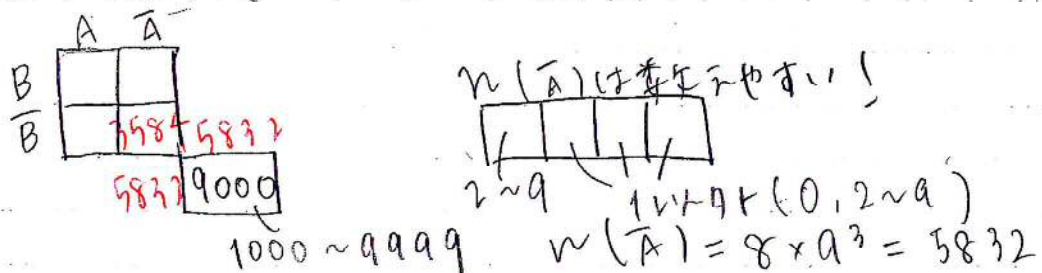
例 A の場合の数  $n(A)$  で表す  $\therefore$  する  
numbers of A



(105) (3) (4)

$A = 1$  011 言われる  $B = 9$  011 言われる 4 通り

(3)  $A \cup B$ , (4)  $A \cap B$  求补



$w(\bar{B}) \neq$ 

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| f | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|

  
1~8      9~11       $w(\bar{B}) = 5832$

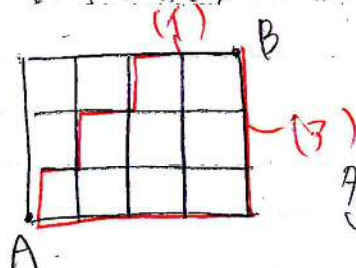
$n(\overline{A} \cap \overline{B}) \approx$    $n(\overline{A} \cap \overline{B}) = 17 \times 8^3 = 3584$

$$P_{32}(3) \vee (A \cup B) = 9000 - 3584 = \underline{5416}$$
$$(4) n(A \cap B) = 0000 - 2 \times 5832 + 3584 = 020$$

⑤ 1文字1対応による数え上げ

(1AU) (906)

(1) 最早と経路の数を示し"



(3)や(4)の他に、全部で何通りあるか<sup>2</sup>

(3) 右右右右土土土

(1) (上上右上有上右右 4" 5")

右程路の1に3つ、右=4つの川原ありが又付る

∴ (A) の不定数も数  $\alpha, \beta, \gamma$  (3通り)

(2) (FT)  $\begin{cases} x+y+z+w=10 \\ x, y, z, w \geq 0 \text{ int} \end{cases} \quad \text{--- (1)}$

この系が整数解  $(x, y, z, w)$  の組数は?

①の解に対し

$$(1, 2, 3, 4) \leftrightarrow \bigcirc + \bigcirc\bigcirc + \bigcirc\bigcirc\bigcirc + \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$$

$(n_1, 1, 2, n) \leftrightarrow 10 + 00 + 00000000$

の5つに、 $0=10$ 個,  $1=3$ 個の皿配置を考える

二、①の総数は

$$\frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 286$$

四 ①の電圧上げは超基本にして押さえておこう！



応用 (重複組合せ)  $A, B, C, D$

異なる4種類のものから重複をゆるして10個選ぶ  
場合はいく通り?

$A$ を $x$ 個,  $B$ を $y$ 個,  $C$ を $z$ 個,  $D$ を $w$ 個  
選ぶ10個を数えるとき  
数え方に①の解 $(x, y, z, w)$ が対応する

$$(i) \begin{cases} x + y + z + w = 10 \\ x, y, z, w \text{ は正の整数} \end{cases} \text{ 何通り?}$$

$$x, y, z, w \geq 1 \text{ という条件}$$

$$\therefore x' = x - 1, y' = y - 1, z' = z - 1, w' = w - 1 \text{ とおけば}$$

$(x', y', z', w') \in (z, y, z, w)$  は一対一対応し、

$$\begin{cases} x' + y' + z' + w' = 6 \\ x', y', z', w' \geq 0 \end{cases} \text{ となる}$$

6個の0を3つの+の順列に対応させる

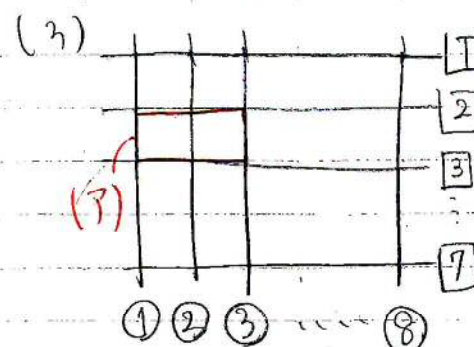
$$nC_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$$

$$(iii) \begin{cases} x + y + z + w = 10 \\ x \geq 0, y \geq 1, z \geq 2, w \geq 3 \end{cases} \text{ 何通り?}$$

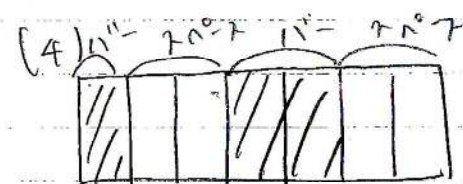
$$x' = x, y' = y - 1, z' = z - 2, w' = w - 3$$

$$\begin{cases} x' + y' + z' + w' = 4 \\ x', y', z', w' \geq 0 \end{cases}$$

$$nC_3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$



(3)に①③ = ②③を対応



2個のバー = 2個の7P-7  
何通り? 何通り?

バー, 7P-7, バー, 7P-7 の場合

$$\begin{cases} x + y + z + w = 7 \\ x, y, z, w \geq 1 \end{cases}$$

7P-7, バー, 7P-7, バー の場合も同じ

$$\therefore 6C_3 \times 2 = 40$$

$$\begin{cases} x' = x - 1, y' = y - 1, z' = z - 1, w' = w - 1 \\ x' + y' + z' + w' = 3 \end{cases}$$

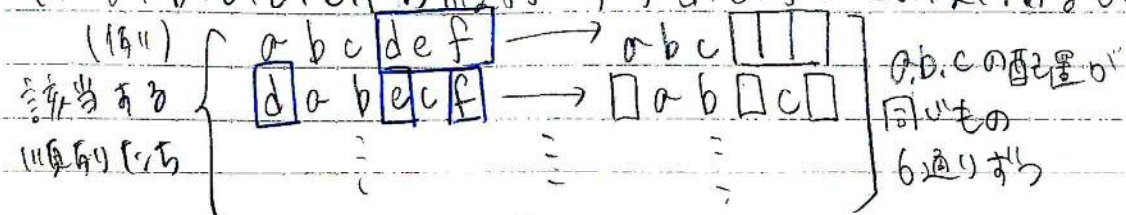
$$8C_2 \times 7C_2 = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \times \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 588$$



2日目

⑥ 東向きを考える、重複分で割る  
(107)

(1) a, b, c, d, e, f の順列のうち d, e, f がこの順にあるものは?



∴ 全順列  $6!$  通りを「6通りずつ」で東向き  
異なるものは  $6! \div 6 = 120$  通り

(2) グループ分け

A, B, C の3グループに分ける方法は何通り?

⇒ A, B, C の3グループに分ける方法は何通り?

∴  ${}^9C_3 \times {}^6C_3 \times 1$  通り

Aグループ Bグループ  
を分ける 分ける

ただし、人数の同じグループは区別しない

A (あいうえお) B (かきけ) C (こ) (け)

A B C

あいう えお け

B C A

⇒ 同じグループ分け

よって、ABC の入れかえで3通りずつは同じグループ分け

∴ 異なるグループ分けは

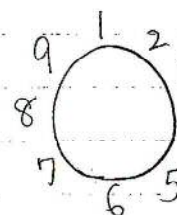
$${}^9C_3 \cdot {}^6C_3 \div 3! = 280$$

④ 8人を3グループに分ける方法は何通り?

$${}^8C_2 \cdot {}^6C_3 \div 2! = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{2} = 280$$

(3) 円順列

- 円形に等間隔に並べる
- 回転して重なるものは同じ円形とみなす



(1) 黒, 白, 赤 1 のとき

赤は 1~9 のいずれかを並べる

$$= {}^9C_1 \times {}^8C_3 \times 1 = 9 \times 56 = 504$$

赤は白と白は赤

このうち回転して重なるものは9通りずつある

∴ 異なる円形は

$$9 \times 56 \div 9 = 56 \text{ 通り}$$

$\frac{2\pi}{9}$  ずつ回転して得られる

(2) 黒, 白, 赤 2 のとき

$${}^9C_2 \times {}^7C_3 = 1680$$

このうち回転して重なるのは

・ 黒白赤の順列が3回くり返すもの

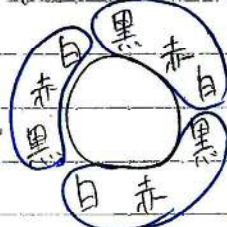


$$\frac{2\pi}{9} \times k \quad (k = 1, 2, 3)$$

この3個が重なる

他にも同様に3回くり返すもの

・ 黒赤白の順列が3回くり返すもの



これも3個が重なる

この2つ以外には、回転して重なるものは9個ずつ

$$(1680 - 6) \div 9 + 2 = 56$$



## §2 2項定理とその応用

$(x+y)^n$  を展開すると各項の係数は  $nCk$

( $k=0, 1, 2, \dots, n$ ) が現れる

1項目  $n$  を  $n$  展開した?

$(x+y)^n = \overset{\textcircled{1}}{(x+y)} \overset{\textcircled{2}}{(x+y)} \overset{\textcircled{3}}{(x+y)} \dots \overset{\textcircled{n}}{(x+y)}$  の展開は

① ~ ② ~ ... から 1 項をとり並べたものの総和が得られる

(例)  $n=3$

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y)$$

$$= xxx + \underbrace{yxx + xyx + xxy}_{x \text{ 2個}, y \text{ 1個}} + \underbrace{yyx + yxy + xyy}_{x \text{ 1個}, y \text{ 2個}} + yyy$$

ある  $x^k y^{n-k}$  項は

$x=k$  個,  $y=n-k$  個の順列の総数だけ現れるので

$nCk$  通り

$(x+y)^n$  の展開における  $x^k y^{n-k}$  の係数は  $nCk$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n nCk x^k y^{n-k}$$

$$(例) (x+y)^5 = x^5 + 5C1 x^4 y + 5C2 x^3 y^2 + 5C3 x^2 y^3 + 5C4 x y^4 + y^5$$

$$= x^5 + 5x^4 y + 10x^3 y^2 + 10x^2 y^3 + 5x y^4 + y^5$$

(201)

$$(2) (a+2b)^5 = a^5 + 5C1 a^4 \cdot 2b + 5C2 a^3 (2b)^2 + 5C3 a^2 (2b)^3 + 5C4 a (2b)^4 + 32b^5$$

$$= a^5 + 10a^4 b + 40a^3 b^2 + 80a^2 b^3 + 80ab^4 + 32b^5$$

$$(3) (2x-3)^7 = (2x)^4 \cdot (-3)^3 \times 7C3 = 15120x^4$$

$$(4) (x+y+z)^8 \quad \underbrace{8C1}_{z \text{ の 次数}} \cdot \underbrace{7C2}_{y \text{ の 次数}} = 8 \cdot 21 = 168$$

$$(5) (x+y+z)^8 = \sum x^k y^l z^m \quad (\text{その係数})$$

$\therefore$  係数の総和は  $x=y=z=1$  を代入した時の右辺から、

$$\text{その値は } (1+1+1)^8 = 3^8 = 6561$$

$$(b) (x^2+x+1)^6 = (x^2)^3 \cdot 1^3 \cdot 6C3 + (x^2)^2 \cdot x^2 \cdot 1^2 \cdot 6C2 \cdot 4C2$$

$$+ (x^2)^1 \cdot x^4 \cdot 1 \cdot 6C1 \cdot 5C1 + x^6 =$$

$$= x^6 \{20 + 90 + 30 + 1\} = 141x^6$$

(202)

$$f(x) = (1+x)^n = nC0 + nC1 x + nC2 x^2 + \dots + nCn x^n = \sum_{k=0}^n nCk x^k$$

(2) (i)  $nCk = nC_{k-1} + nC_k$  ( $1 \leq k \leq n-1$ ) を示せ.

$$\textcircled{=} (1+x)^n = \underbrace{(1+x)^{n-1}}_{\textcircled{1}} \times \underbrace{(1+x)}_{\textcircled{2}} \quad x^k \text{ 項は}$$

① の  $x^k$  項  $\times$  1 + ① の  $x^{k-1}$  項  $\times x$  よりえられる

よって、1 係数を比べれば

$$nCk = nC_{k-1} + nC_k //$$

$$(ii) (nC0)^2 + (nC1)^2 + (nC2)^2 + \dots + (nCn)^2 = 2nCn$$

右辺は  $(1+x)^{2n}$  の展開における  $x^n$  の係数

$$= (1+x)^{2n} = \underbrace{(1+x)^n}_{\textcircled{1}} \underbrace{(1+x)^n}_{\textcircled{2}} \quad x^k \text{ 項は}$$

① の  $x^k$  項  $\times$  ② の  $x^{n-k}$  項 ( $k=0, 1, 2, \dots, n$ ) の総和

の係数より

$$(nC0) \times (nCn) + (nC1) \times (nC_{n-1}) + (nC2) \times (nC_{n-2})$$

$$+ \dots + (nCn) \times (nC0) = 2nCn$$

より、等式を導く

$$\textcircled{=} (1+x)^n = \sum_{k=0}^n nCk x^k \quad \text{の等式を用いて導ければよい}$$



(3)  $nCr$  の和の問題

$$(i) P = nC_0 + 2 \cdot nC_1 + 2^2 \cdot nC_2 + \dots + 2^n \cdot nC_n$$

$\therefore$  の和は  $f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n nC_k \cdot x^k$

$$x=2 \text{ を代入した値だから } P=3^n$$

$$(ii) Q = nC_0 + nC_1 + nC_2 + \dots + nC_n$$

$$\text{は } x=1 \text{ を代入した値だから } Q=2^n$$

$$(iii) R = nC_0 + nC_2 + nC_4 + \dots + \begin{cases} nC_{n-1} & (n:\text{奇数}) \\ nC_n & (n:\text{偶数}) \end{cases}$$

$\uparrow$   
  $k$  が偶数の項の和を求めたい

$$(1+1)^n = nC_0 + nC_1 + nC_2 + \dots + nC_n \quad \text{--- ①}$$

$$(1-1)^n = nC_0 - nC_1 + nC_2 - \dots + (-1)^n nC_n \quad \text{--- ②}$$

$$\text{①} + \text{②} = 2^n = 2R \therefore R = 2^{n-1}$$

$$T = nC_1 + nC_3 + nC_5 + \dots + \begin{cases} nC_n & (n:\text{奇数}) \\ nC_{n-1} & (n:\text{偶数}) \end{cases} \quad \text{は?}$$

$$\text{①} - \text{②} = 2^n = 2T \therefore T = 2^{n-1}$$

(203)

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n nC_k \cdot x^k \text{ である}$$

$$(1) \text{ これを利用して } k \cdot nC_k = n \cdot n-1C_{k-1} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

を示す。  
  $f(x)$  を微分すれば、左辺が導関数であるから、考えよう...

両辺を微分して

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n nC_k \cdot k \cdot x^{k-1}$$

$k=0$  の時は  $nC_0$  は定数なので微分すると消える

左辺は  $x^{n-1}$  の係数を比べる

左辺の係数は  $n \cdot n-1C_{n-1}$ 、右辺は  $nC_k \cdot k$   
 よって等式が導ける

$$(2) (i) S = nC_1 + 2 \cdot nC_2 + 3 \cdot nC_3 + \dots + n \cdot nC_n$$

$k \cdot nC_k = n \cdot n-1C_{k-1}$  を各項に用いる

$$= n \cdot n-1C_{1-1} + n \cdot n-1C_{2-1} + n \cdot n-1C_{3-1} + \dots + n \cdot n-1C_{n-1}$$

$$= n \{ n-1C_0 + n-1C_1 + n-1C_2 + \dots + n-1C_{n-1} \}$$

$$= 2 \cdot 2^{n-1} \quad \uparrow (1+1)^{n-1}$$

(ii) のヒント

$$\int_0^x x^k dx = \left[ \frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_0^x$$



$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_n = k \\ a_1 \sim a_n \text{ は } 0 \text{ 以上 } \square \text{ 以下の整数} \end{cases}$$
 を満たす  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  の数も  
 あるが項式の展開における係数で求める

(204)(2)

101個のまちびやうをらトで分ける

1ト3個以下に制限するを分けるは何通り?

らトのしりふをそれぞれ  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  個として

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 10 \\ a_1 \sim a_5 \text{ は } 0 \text{ 以上 } 3 \text{ 以下の整数} \end{cases}$$

を求めたい

解の個数も調べればよい

しかし

$(1+x+x^2+x^3)^5$  の展開を対応させる

$(1+x+x^2+x^3)^5$  の展開を対応させる  
 ① ② ③ ④ ⑤  
 $(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3)$   
 において①~⑤のそれぞれから1項ずつとり出し並べる

$$\underbrace{x^{a_1}}_{\text{①からとる}}, \underbrace{x^{a_2}}_{\text{②}}, \underbrace{x^{a_3}}_{\text{③}}, \underbrace{x^{a_4}}_{\text{④}}, \underbrace{x^{a_5}}_{\text{⑤}}$$

$a_1 \sim a_5$  は 0 以上 3 以下の整数

ある4項の答えはこの展開における  $x^{10}$  項に着目すればよい

$(1+x+x^2+x^3)^5$  の  $x^{10}$  項は

$$\begin{aligned}
 & (x^3)^3 \times (x)^1 \times 1^1 \times 5 \times 4 \\
 & + (x^3)^2 \times (x^2)^2 \times 1^1 \times 5 \times 4 \times 2 \\
 & + (x^3)^2 \times (x^2)^1 \times (x)^2 \times 5 \times 4 \times 2 \\
 & + (x^3)^1 \times (x^2)^3 \times (x)^1 \times 5 \times 4 \\
 & + (x^2)^5
 \end{aligned}$$

$$= x^5 \{ 20 + 30 + 30 + 20 + 1 \}$$

$$= 101x^5$$

$\therefore 101$  個の解がある

3日目



④  $\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_n = k \\ a_1 \sim a_n \text{ は } 0 \text{ 以上 } \square \text{ 以下の整数} \end{cases}$   
 を満たす  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  の数  
 あるが項式の展開における係数で求める

(204)(2)

101個のまじわりをラットで回ける  
 1から10個以下に制限するものは何通り？  
 ラットの割り方を考えれば  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  個として

$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 10 \\ a_1 \sim a_5 \text{ は } 0 \text{ 以上 } 3 \text{ 以下の整数} \end{cases}$   
 を満たす

解の個数を調べればよい  
 ために

$(1+x+x^2+x^3)^5$  の展開を対応させる

①  $(1+x+x^2+x^3)$  ②  $(1+x+x^2+x^3)$  ③  $(1+x+x^2+x^3)$  ④  $(1+x+x^2+x^3)$  ⑤  $(1+x+x^2+x^3)$   
 において ① ~ ⑤ のそれぞれから1項ずつとり出し並べる

$x^{a_1} \cdot x^{a_2} \cdot x^{a_3} \cdot x^{a_4} \cdot x^{a_5}$   
 ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

$a_1 \sim a_5$  は 0 以上 3 以下の整数  
 あると解の答えはこの展開における  $x^{10}$  項に着目すればよい  
 $(1+x+x^2+x^3)^5$  の  $x^{10}$  項は

$$\begin{aligned} & (x^3)^3 \cdot (x^1)^1 \cdot 1^1 \times 5 \times 4 \\ & + (x^3)^2 \cdot (x^2)^2 \times 1^1 \times 5 \times 4 C_2 \\ & + (x^3)^2 \cdot (x^2)^1 \cdot (x^1)^2 \times 5 \times 4 C_2 \\ & + (x^3)^1 \cdot (x^2)^3 \cdot (x^1)^1 \times 5 \times 4 \\ & + (x^2)^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = x^{10} \{ 20 + 30 + 30 + 20 + 1 \} \\ & = 101x^{10} \end{aligned}$$

∴ 101個の解がある

確率  $\rightarrow$  コインを投げると「表」か「裏」か

確率: 不確定事象について  
 起こる割合の値をわかりやすくしたもの

正しいコイントシ「表」は「裏」は

④ 事象 A の起こる確率を  $P(A)$  で表す probability

高校数学での確率では登場するもの、順番はあべに区別して  
 考えるものもある。

このような状態で考えれば1つ1つの素事象が等確率と考える。

(303)

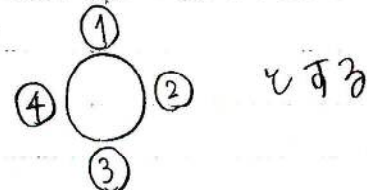
(1) 10円玉2枚を区別して ⑩<sub>1</sub>, ⑩<sub>2</sub> とする  
 出た表(○), 裏(X)の出方は

○○, ○X, X○, XX ← 順列で考える

であり、これが等確率である

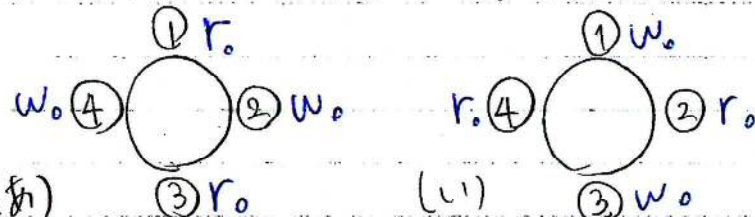
あると表、裏が1枚が1通りなので  $p = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

(2) 赤2つ、白2つを  $r_1, r_2, w_1, w_2$  と区別する  
 円形に置く場所を



$r_1, r_2, w_1, w_2$  の ① ~ ④ への置き方は  $4! = 24$  通り  
 (等確率が現れる)

このうち赤と白が交互に現れるのは

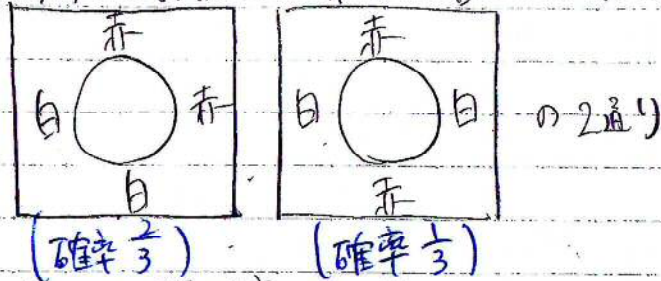


(a) は  $2! \times 2! = 4$   
 (i) は  $2! \times 2! = 4$  } 8通り

$$a = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$



(注) 円順列を計れば 赤2つ、白2つのおまきは



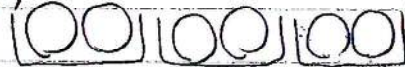
円順列は等確率ではない

並べ替わった2枚の紙を等確率にえらぶ

この問題は

→ そうではない!

(302)



りんご、おかしを2個ずつ

これを2個ずつ3つの箱に盛る

このときどの箱にも異なる果物が入る確率  $p$  は?

ヒント

果物を区別する リンゴ、りんご、おかし、おかし、りんご、りんご

3つの箱に置く場所を区別する ①②③④⑤⑥

まず①に置くのは何でも良い... 6通り

りんごをばりておく

次に②に置くのはりんご、おかし 4通り

りんごをばりておく

③、④には リンゴ、おかし の順列は置けない

りんご、おかし...  $2 \times 2!$

おかし、りんご...  $2 \times 2!$

ある⑤、⑥には 3つの順列が入る...  $2!$

$$p = \frac{6 \times 4 \times 8 \times 2}{6!}$$

$$= \frac{8}{15}$$

条件付き確率

事象  $A$  が起った時に  $B$  が起きる確率

このとき事象  $B$  の起きる確率を

$A$  の下での  $B$  の起きる (条件付き) 確率を  $P_A(B)$  で表す。

(例) さいころを1回ふると偶数の目が出る  $A$  (確定)  
このとき さいころの目が4以上である確率  $p$  は?

|           | A | $\bar{A}$ |
|-----------|---|-----------|
| B         | 2 | 1         |
| $\bar{B}$ | 4 | 3         |
|           | 6 | 5         |

$A$  が確定しているのだから「2」「4」「6」が等確率...  $\frac{1}{3}$

このうち  $B$  は「4」「6」

求める確率は  $p = \frac{2}{3}$

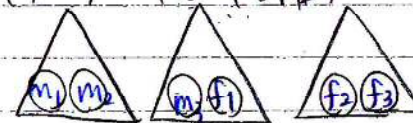
$\uparrow$   $P_A(B)$

割合を  $P(A) \neq 0$  の時

$P_A(B) = \{P(A) \text{ による } P(A \cap B) \text{ の割合} \}$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ である}$$

(304) テントの問題



男...  $m_1, m_2, m_3$

女...  $f_1, f_2, f_3$

誰か近事をしてる確率は  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

近事をしたのがおかしにそのテントの  
おかしが女である確率は  $\frac{2}{3}$

|       | 近事は女  | 近事は男  |
|-------|-------|-------|
| おかしは男 | $f_1$ | $m_1$ |
| おかしは女 | $f_2$ | $m_2$ |
|       | $f_3$ | $m_3$ |

$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

(近事は女...  $f_1, f_2, f_3$   
おかしは女...  $f_2, f_3$ )

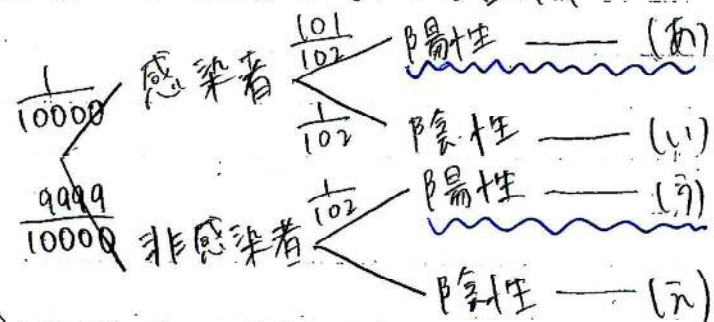


(305)

(1) 感染率が  $\frac{1}{10000}$

ある検査法がある。感染者が陽性  
・非感染者が陽性(誤診率)が  $\frac{1}{102}$

この検査で陽性だった人が  
本当に感染者である確率  $P$  は?



{ 陽性だった人 (あ)(う)  
かつ本当に感染者 (あ)  
よって求めるべきは

$$P = \frac{P(\text{あ})}{P(\text{あ}) \cup P(\text{う})}$$

$$P(\text{あ}) = \frac{1}{10000} \times \frac{101}{102} = \frac{101}{1020000}$$

$$P(\text{あ} \cup \text{う}) = \frac{1}{10000} \times \frac{101}{102} + \frac{9999}{10000} \times \frac{1}{102} = \frac{10100}{1020000}$$

$$\therefore P = \frac{101}{10100} = \frac{1}{100}$$

四 陽性だった人が非感染者である確率は  $\frac{99}{100}$

(2)  $\frac{1}{5}$  Aが忘れる (あ)

$\frac{4}{5}$  Aが忘れない  $\frac{1}{5}$  Bが忘れる (い)

$\frac{4}{5}$  Bが忘れない  $\frac{1}{5}$  Cが忘れる (う)

A, B, Cのいずれかで忘れた

このとき、Bが忘れた確率  $Q$  は?

(あ)  $\dots \frac{1}{5}$   
(い)  $\dots \frac{4}{5} \times \frac{1}{5}$   
(う)  $\dots \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5}$

計  $\frac{61}{125}$  (A, B, Cのいずれかで忘れた)

よって、(い)の割合が求めるべきもの

$$Q = \frac{\frac{20}{125}}{\frac{61}{125}} = \frac{20}{61}$$

四 事象の独立

2つの事象 A, B が独立であるとは、片方が成り立つともう一方

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad \text{--- } \textcircled{\times}$$

四  $\textcircled{\times}$  が成り立つのは A と B が独立なときに限る! ということ  
(いつれも成り立つわけではない)

四 なぜ「ん」が定義か?

条件付き確率を思い出そう

$P(A|B)$  ... Aが起きたときの Bの起きる確率

$P(B)$  ... 単に Bの起きる確率

Aが起きようがどうしようが Bの起きる割合は変わらない  
影響を受けない、無関係である  $\Rightarrow$  独立



④ ①②,  $P(A) \neq 0$  のときは

$$P_A(B) = P(B)$$

$$\Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \therefore P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad \text{--- ①}$$

より,  $\otimes$  をえる

$P(A) = 0$  の時も含めて  $\otimes$  で独立を定義する, というわけ

④ 一般に

$$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(A) \times P(B)$$

(306)

(i)  $Q = \{1, \dots, 12\}$  である

$D = \{4, 8, 12\}$  である

(i)  $\Rightarrow$  "3" - "4" がたない場合 ( $\rightarrow$  52枚)

$$P(Q) = \frac{1}{13}, P(D) = \frac{1}{4}, P(Q \cap D) = \frac{1}{52}$$

$$\uparrow \frac{4}{52}$$

$$\uparrow \frac{13}{52}$$

$$\uparrow \frac{1}{13} \times \frac{1}{4}$$

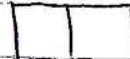
$\therefore Q$  と  $D$  は独立

(ii)  $\Rightarrow$  "3" - "4" を含む場合 ( $\rightarrow$  53枚)

$$P(Q) = \frac{4}{53}, P(D) = \frac{13}{53}, P(Q \cap D) = \frac{1}{53} \neq \frac{4}{53} \times \frac{13}{53}$$

$\therefore Q$  と  $D$  は独立でない

(2) ① ②



A: 1回目の目が4以上

B: 2回目の目が偶数

$A \cap B$ : 1回目の目が4以上, 2回目の目が偶数

$$P(A) = \frac{3}{6}$$

$$P(B) = \frac{3}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3 \times 3}{36}$$

$\therefore A$  と  $B$  は独立

④ ①②③を3回ふるとき

A: 1回目 が 1

B: 2回目 が 偶数

C: 3回目 が 2以上

$$\text{とあるとき } P(A \cap B \cap C) = \frac{1 \times 3 \times 2}{6^3}$$

① ② ③



1 2 or 4 or 6

一方,

$$P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} \text{ で等しい}$$

前者は, 後者 (各回の目の確率の積) で求まる

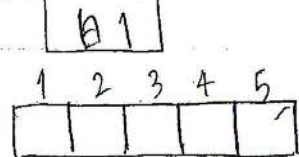


4日目



54 独立試行の確率・確率の漸化式

(402) (1) 赤2 白1 1つ取り出して戻す を5回くり返す



各回の結果は他の回に影響を及ぼさない

(ア) 赤がちょうど2回出る確率は  

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 5C_2 = \frac{40}{243}$$
 赤が2回 白が3回 どの2回も赤か

(イ) 赤が2回以上出る確率  $\rightarrow$  比べる  
 2回 or 3回 or 4回 or 5回

余事象 0回 or 1回 が出る1から引く

$$1 - \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot 5C_1 \right\} = 1 - \frac{1+10}{243} = \frac{232}{243}$$

白が5回 赤が1回

(2) (ア)  $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot 5C_2 = \frac{250}{7776} \quad \text{①} \quad \frac{125}{3888}$

(1)  $1 - \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6C_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \right\} = 1 - \frac{7}{64} \quad \text{②} \quad \frac{57}{64}$

(7)  $\frac{1}{3} \cdot 7C_3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{35 \cdot 16}{6561} \quad \text{③} \quad \frac{560}{6561}$

「5以上の目が出る」をAとする  
 Aが4回出るまで7回続ける  
 8回目で終わるものは

・ 8回目はA (赤が4回目のA)  
 ・ 1~7回目ではAは3回 以下 (P(A) = 1/3)

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times 7C_3 = \frac{560}{6561}$$
 8回AA 1~7回目

(403) サイコロをn回ふる

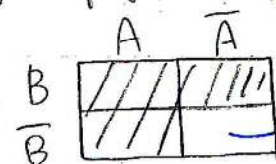
(1) 出た目の積が4の倍数である確率Pnは？  
 積が4の倍数となるのはどんなとき？

A: 少なくとも1回は4が出る

B: 2か6が2回以上出る

のいおれか (A ∪ B)

Pn = P(A ∪ B) を求める



P(A-bar ∩ B) を調べて1から引けばいい

A ∩ B-bar は 4が出ない かつ

具体的に見る  
 ・ 2 or 6 も 0回 or 1回しか出ない  
 n回でも 1, 3, 5 または 1回 2 or 6, n-1回 1, 3, 5

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot nC_1$$

$$\therefore Pn = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{n}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

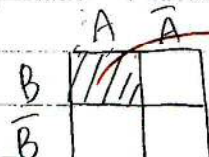
追加

出た目の積が6の倍数である確率Pnは？

A: 少なくとも1回偶数が出る

B: 少なくとも1回3の倍数が出る

求めるA ∩ B



どう求める？

↓  
 まわりから求める!  
 余事象

④ 
$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

Aは偶数が出ない: n回でも1, 3, 5 } A ∩ B-bar は  
 Bは3 or 6が出ない: n回でも1, 2, 4, 5 } n回でも1, 5



$$\therefore P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\therefore q_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

問 素数が12の倍数である確率は？  
(答えは 0日0)

(2) 1の目が偶数回出る確率  $q_n$  は？

$$q_n = nC_0 \left(\frac{5}{6}\right)^n + nC_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + nC_4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-4} + \dots$$

$\begin{matrix} 1回(1回以上) & 1回 & 1回 & \\ 0回(0回) & 2回 & 4回 & \end{matrix}$

この未知を求めよう！ (202)(3)のRの求め方から  
参考になりそう...

$$S = nC_0 \left(\frac{5}{6}\right)^n + nC_1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + nC_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + \dots + nC_n \left(\frac{1}{6}\right)^n = \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\right)^n \quad \text{①}$$

$$T = nC_0 \left(\frac{5}{6}\right)^n - nC_1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + nC_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} - \dots + (-1)^n nC_n \left(\frac{1}{6}\right)^n = \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\right)^n \quad \text{②}$$

二項定理の式より

$$(x+y)^n = nC_0 x^n + nC_1 x^{n-1} y + nC_2 x^{n-2} y^2 + \dots + nC_n y^n$$

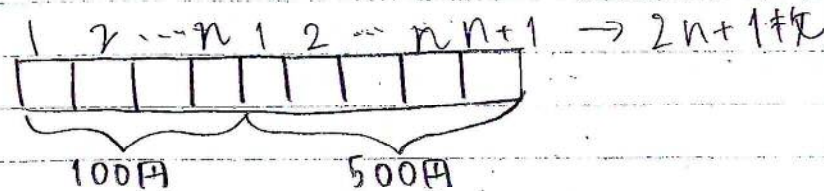
①+②より

$$S+T = 2q_n \therefore q_n = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\}$$

(407)(2)

100円玉:  $n$ 枚  
500円玉:  $n+1$ 枚  
を投げける

表の出た100円玉の枚数と表の出た500円玉の枚数が等しい  
確率  $q$  は？



考えようのは

$a=0$

$a=1$

$a=2$

$a=n$

$nC_0 \times n+1C_0 + nC_1 \times n+1C_1 + nC_2 \times n+1C_2 + \dots + nC_n \times n+1C_n$  通り  
これは

$$nC_0 \times n+1C_{n+1} + nC_1 \times n+1C_n + nC_2 \times n+1C_{n-1} + \dots + nC_n \times n+1C_1 \quad \text{①}$$

とできる

①は  $(1+x)^n (1+x)^{n+1}$  の展開における  $x^{n+1}$  の係数

なぜなら  $x^{n+1}$  項は

$$x^k \cdot nC_k \times x^{n+1-k} \cdot n+1C_{n+1-k}$$

①から出てくる ②から出てくる

( $k=0, 1, \dots, n$ )

をすべて足し合わせたものが答え。

一方、 $(1+x)^{2n+1}$  の  $x^{n+1}$  項の係数は  $2n+1C_{n+1}$

より、① =  $2n+1C_{n+1}$

$$\therefore \text{求める確率 } q \text{ は } q = \frac{2n+1C_{n+1}}{2^{2n+1}}$$

問 この二項定理に関する知識が役立つ場面は？

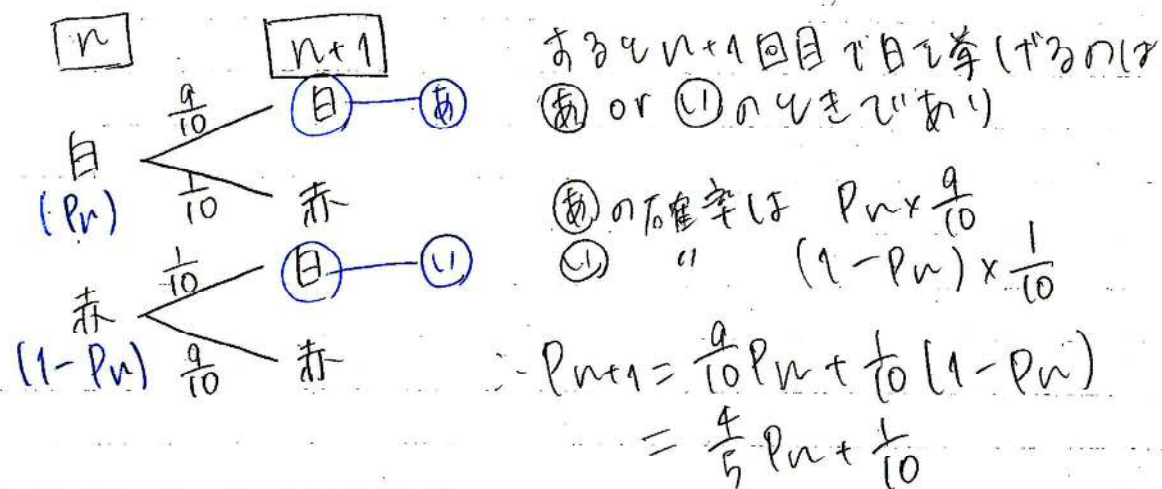


漸化式をつくらって確率を求める

主にn回目の結果からn+1回目の結果を求めるとき  
漸化式をつくる事ができるかどうか考えてみるよ。

(404)

前の番号の1の結果をみれば確率  $\frac{9}{10}$  で同じ色 を挙げる  
  $\frac{1}{10}$  で異なる色

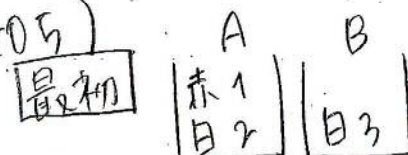


これを解けばいい。

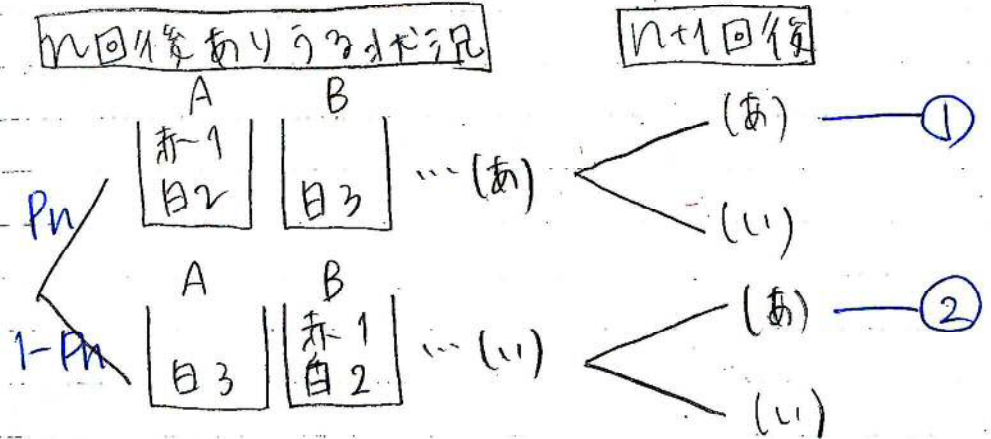
$$\begin{cases} P_1 = 1 \text{ (番号1の人は必ず白を挙げる)} \\ P_{n+1} = \frac{4}{5}P_n + \frac{1}{10} \text{ --- ①} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{①} \Rightarrow P_{n+1} - \frac{1}{2} &= \frac{4}{5}(P_n - \frac{1}{2}) \\ \text{よって } \{P_n - \frac{1}{2}\} &\text{は公比 } \frac{4}{5} \text{ の等比数列} \\ P_n - \frac{1}{2} &= (P_1 - \frac{1}{2}) \times (\frac{4}{5})^{n-1} \\ P_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\frac{4}{5})^{n-1} \end{aligned}$$

(405)



操作 = Aから1つ取りBに入れる  
Bから1つ取りAに入れる。  
n回の操作後、Aに赤がある確率  $P_n$  は?



$$\text{①の確率は } P_n \times \left\{ \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times 1 \right\} = \frac{3}{4}P_n$$

Aから赤 Bから赤 Aから白

$$\text{②の確率は } (1-P_n) \times \left\{ 1 \times \frac{1}{4} \right\} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}P_n$$

Aから白 Bから赤

$$\therefore P_{n+1} = P(\text{①}) + P(\text{②}) = \frac{3}{4}P_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}P_n = \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{4}$$

これを  $P_0 = 1$  のFで解いて

$$\begin{aligned} P_{n+1} - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}(P_n - \frac{1}{2}) \\ P_n - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}^n \end{aligned}$$

$$P_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$



(406) 総取り(破産)の確率

最初  $A = a$  万円

$B = b$  万円

ルール 買った方が負けの方向に1万円もらう

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{A \text{ win}} \begin{pmatrix} a+1 \\ b-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A \text{ win}} \begin{pmatrix} a+2 \\ b-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{B \text{ win}} \begin{pmatrix} a+1 \\ b-1 \end{pmatrix} \rightarrow \dots$

最終的に  $\begin{pmatrix} a+b \\ 0 \end{pmatrix}$  になり  $A$  が総取りする確率は?

持ち金のお互い(お互いに)来たりするのび考えがらいか...

「 $k$  万円から始めて最終的に  $A$  が勝つ確率を  $P_k$  とする」と

$\begin{pmatrix} k \\ a+b-k \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}]{A \text{ win}} \begin{pmatrix} k+1 \\ a+b-k-1 \end{pmatrix} \rightarrow \dots$   
 $\xrightarrow[\frac{1}{2}]{A \text{ lose}} \begin{pmatrix} k-1 \\ a+b-k+1 \end{pmatrix} \rightarrow \dots$

$k$  万円から始めた場合,

- ・次に  $A$  が勝つか
  - ・次に  $A$  が負けるか
- で分ければ最終的に  $A$  の勝つ確率は

$$P_k = \frac{1}{2} P_{k+1} + \frac{1}{2} P_{k-1} \quad \text{--- ①}$$

これを解けばよい

$$2P_k = P_{k+1} + P_{k-1}$$

$$P_{k+1} = 2P_k - P_{k-1} \quad \text{--- ①'}$$

$$\therefore P_{k+1} - P_k = P_k - P_{k-1} \quad \text{--- ①''}$$

つまり、 $\{P_{k+1} - P_k\}$  は定数数列

$$\therefore P_{k+1} - P_k = P_1 - P_0 = P_1 \quad (P_0 = 0)$$

つまり、 $\{P_k\}$  は公差  $P_1$  の等差数列

$$\text{よって, } P_k = P_0 + P_1 \times k = \underbrace{P_1}_? k$$

$$P_{a+b} = 1 \text{ となる}$$

$$P_{a+b} = P_1 \cdot (a+b) \therefore P_1 = \frac{1}{a+b}$$

$$\text{よって, } P_k = \frac{1}{a+b} k \quad \left( \frac{A \text{ の元金}}{A \text{ の元金} + B \text{ の元金}} \right)$$

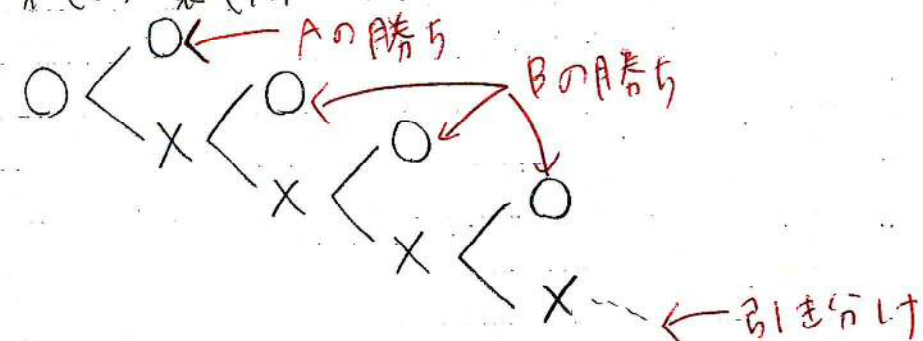


5日目



から 確率変数・期待値

(501) 賭けにのるべからず  
表(0), 裏(X)とする



あると

$$P(\text{Aの勝ち}) = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{引き分け}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_0 = 0$$

∴  $P(\text{Bの勝ち}) = \frac{3}{4}$  である

Aの勝ちでAは1000円もらえる  
Aが負けるでAは500円失う 損得はどう評価する?

思考実験

この賭けを400回行うと  
Aは100回くらい勝ち、1000×100円(儲ける)  
300回くらい負け、500×300円(損する)  
その結果 10万-15万=-5万(5万の損)  
∴ 損得は可視化できる

41回あたり

$$\frac{1000 \times 100 - 500 \times 300}{400} = -\frac{50000}{400} = -125$$

$$\hookrightarrow 1000 \times \frac{1}{4} + (-500) \times \frac{3}{4} = -125$$

[1回あたりの儲けの平均値]

この考えを一般化したものが「確率変数と期待値(平均値)」

各事象に対して変数Xの値が1つ決まるとき、  
Xを確率変数という

(501)の例で

Aが負け → X=100, Aが負ける → X=-500

いうようにして確率変数Xが決まる  
このXの平均値のことをXの期待値といい E(X)で表す。 Expect

$$E(X) = \sum_{\text{Xの値}} k \times P(X=k) \quad \text{で計算できる}$$

すべての和

(502) サイコロ1回振る

| 目 | 1  | 2 | 3 | 4 | 5  | 6 |
|---|----|---|---|---|----|---|
| X | -1 | 2 | 0 | 2 | -1 | 2 |

あると  $P(X=-1) = P(1 \text{ or } 5) = \frac{1}{3}$

$$P(X=0) = P(3) = \frac{1}{6}$$

$$P(X=2) = P(2 \text{ or } 4 \text{ or } 6) = \frac{1}{2}$$

も4出る、これを表にしたいものは

| X=k    | -1            | 0             | 2             |
|--------|---------------|---------------|---------------|
| P(X=k) | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ |

[確率分布表]

Xの期待値は

$$E(X) = -1 \times \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$



(503)

(1) 赤4  
白332選が!!  
○○○ $X = \{ \text{ } \}$ の中の赤の個数  
あるいは  $X = 0, 1, 2, 3$ (2)  $X$  の確率分布は?(1)  $E(X)$ 

| $k$      | 0                  | 1               | 2               | 3              |
|----------|--------------------|-----------------|-----------------|----------------|
| $P(X=k)$ | $\frac{1}{35}$     | $\frac{12}{35}$ | $\frac{18}{35}$ | $\frac{4}{35}$ |
|          | $\uparrow$         | $\uparrow$      | $\uparrow$      | $\uparrow$     |
|          | $3C_3$             | $4C_2$          | $3C_2$          | $1C_3$         |
|          | $7C_3$             | $7C_3$          | $7C_3$          | $7C_3$         |
|          | $4C_1 \times 3C_2$ | $4C_3$          |                 |                |
|          | $7C_3$             | $7C_3$          |                 |                |

$$= 0 \times \frac{1}{35} + 1 \times \frac{12}{35} + 2 \times \frac{18}{35} + 3 \times \frac{4}{35}$$

$$= \frac{60}{35} = \frac{12}{7}$$

(2) 1つ1つを2回ふる。出た目の和を  $X$ 

| $k$      | 2              | 3              | 4              | 5              | 6              | 7              | 8              | 9              | 10             | 11             | 12             |
|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $P(X=k)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

$$\therefore E(X) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36}$$

$$+ 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36}$$

$$= \frac{1}{36} (2+12) + \frac{2}{36} (3+11) + \frac{3}{36} (4+10) + \frac{4}{36} (5+9) + \frac{5}{36} (6+8) + \frac{6}{36} \cdot 7$$

$$= 14 \cdot \frac{1+2+3+4+5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36}$$

$$= \frac{7}{36} (2 \times 15) + \frac{7}{36} \cdot 6 = \frac{7}{36} \times 36 = 7$$

(504)

各打席で  $\left\{ \begin{array}{l} \text{ヒット} \cdots \frac{4}{10} \\ \text{ヒットでない} \cdots \frac{6}{10} \end{array} \right.$  とする(1) 5打席の間でのヒットの素数を  $X$  とする。

確率分布を表す

| $k$      | 0                             | 1                                                           | 2                                                                          | 3                                                                          | 4                                                           | 5                             |
|----------|-------------------------------|-------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| $P(X=k)$ | $\left(\frac{6}{10}\right)^5$ | $5C_1 \cdot \frac{4}{10} \cdot \left(\frac{6}{10}\right)^4$ | $5C_2 \cdot \left(\frac{4}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{10}\right)^3$ | $5C_3 \cdot \left(\frac{4}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{6}{10}\right)^2$ | $5C_4 \cdot \left(\frac{4}{10}\right)^4 \cdot \frac{6}{10}$ | $\left(\frac{4}{10}\right)^5$ |

$$p = \frac{4}{10}, q = \frac{6}{10} \text{ とおく}$$

$$E(X) = 1 \times 5C_1 p q^4 + 2 \times 5C_2 p^2 q^3 + 3 \times 5C_3 p^3 q^2 + 4 \times 5C_4 p^4 q + 5 \times p^5$$

$$k \cdot n C_k = n \cdot n-1 C_{k-1} \leftarrow (203)(1)$$

$$\therefore E(X) = 1 \cdot 5C_1 = 5 \cdot 4C_0, 2 \cdot 5C_2 = 5 \cdot 4C_1, 3 \cdot 5C_3 = 5 \cdot 4C_2,$$

$$4 \cdot 5C_4 = 5 \cdot 4C_3, 5 \cdot 5C_5 = 5 \cdot 4C_4 \text{ とすれば}$$

$$E(X) = 5 \{ 4C_0 p q^4 + 4C_1 p^2 q^3 + 4C_2 p^3 q^2 + 4C_3 p^4 q + 4C_4 p^5 \}$$

$$= 5p \{ 4C_0 q^4 + 4C_1 p q^3 + 4C_2 p^2 q^2 + 4C_3 p^3 q + 4C_4 p^4 \}$$

$$= 5p (p+q)^4 \quad p = \frac{4}{10}, q = \frac{6}{10} \text{ より}$$

$$E(X) = 5 \cdot \frac{2}{5} = 2$$



(505)

| (1)                  | (1,2) | (1,3) | (2,1) | (2,3) | (3,1) | (3,2) |
|----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 小さい方 $\rightarrow X$ | 1     | 1     | 1     | 2     | 1     | 2     |
| 大きい方 $\rightarrow Y$ | 2     | 3     | 2     | 3     | 3     | 3     |
| $X+Y=Z$              | 3     | 4     | 3     | 5     | 4     | 5     |
| $XY=W$               | 2     | 3     | 2     | 6     | 3     | 6     |

(2) それぞれの確率分布は

|        |               |               |
|--------|---------------|---------------|
| $X$    | 1             | 2             |
| $P(X)$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

|        |               |               |
|--------|---------------|---------------|
| $Y$    | 2             | 3             |
| $P(Y)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |

|        |               |               |               |
|--------|---------------|---------------|---------------|
| $Z$    | 3             | 4             | 5             |
| $P(Z)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

|        |               |               |               |
|--------|---------------|---------------|---------------|
| $W$    | 2             | 3             | 6             |
| $P(W)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

(3) それぞれの期待値は

$$E(X) = 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$E(Y) = 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$P(Z) = 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{3} = \frac{12}{3} = 4 = \frac{4}{3} + \frac{8}{3}$$

$$P(W) = 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3} + 6 \times \frac{1}{3} = \frac{11}{3} \neq \frac{4}{3} + \frac{8}{3}$$

$$\rightarrow E(XY) \neq E(X)E(Y)$$

$$(4) E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

の成り立ちの証明を説明する

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= 3 \times P((1,2) \text{ or } (2,1)) \\ &\quad + 4 \times P((1,3) \text{ or } (3,1)) \\ &\quad + 5 \times P((2,3) \text{ or } (3,2)) \\ &= (1+2)(P(1,2) + P(2,1)) \\ &\quad + (1+3)(P(1,3) + P(3,1)) \\ &\quad + (2+3)(P(2,3) + P(3,2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot (P(1,2) + P(2,1) + P(1,3) + P(3,1)) \\ &\quad + 2 \cdot (P(1,2) + P(2,1) + P(2,3) + P(3,2)) \\ &\quad + 3 \cdot (P(1,3) + P(3,1) + P(2,3) + P(3,2)) \\ &\text{これを } E(X), E(Y) \text{ に 組み直す } \dots \\ &= 1 \cdot (P(1,2) + P(2,1) + P(1,3) + P(3,1)) + 2 \cdot (P(2,3) + P(3,2)) \\ &\quad + 2 \cdot (P(1,2) + P(2,1)) + 3 \cdot (P(1,3) + P(3,1) + P(2,3) + P(3,2)) \\ &= E(X) + E(Y) \parallel \end{aligned}$$

一般の場合の  $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$  の説明  
簡単のため  $X$  のとり値を  $x_1, x_2, x_3$   
 $Y$  のとり値を  $y_1, y_2$  とする。

|                  |       |       |       |
|------------------|-------|-------|-------|
| $X \backslash Y$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
| $y_1$            | $p$   | $q$   | $r$   |
| $y_2$            | $s$   | $t$   | $u$   |

$X = x_i$  かつ  $Y = y_j$  の確率  
を左の表に書き添える

ある  $x_i, X+Y$  の期待値は

$$E(X+Y) = (x_1+y_1) \cdot p + (x_2+y_1) \cdot q + (x_3+y_1) \cdot r \\ + (x_1+y_2) \cdot s + (x_2+y_2) \cdot t + (x_3+y_2) \cdot u$$

これを組みかえる

$$\begin{aligned} &= x_1(p+s) + x_2(q+t) + x_3(r+u) \\ &\quad + y_1(p+q+r) + y_2(s+t+u) \\ &= E(X) + E(Y) \parallel \end{aligned}$$



$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

和の  
期待値 = 期待値  
の和

の応用

繰り返しつかうと

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

(506)

(1) 1 ~ n から 3 つ選ぶ

3 数の和 X の期待値は?

— 1 — 1 — 1 — 1 —

$$X_i \text{ と } X_j = \begin{cases} i & (3 \text{ 数の中に } i \text{ が入る}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

とする

( $i = 1, 2, \dots, n$ ) とすると

$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  である

$$\left( \begin{array}{l} \text{例えば } (2, 3, 5) \text{ を選ぶ場合} \\ X = \underbrace{0}_{X_1} + \underbrace{2}_{X_2} + \underbrace{3}_{X_3} + \underbrace{0}_{X_4} + \underbrace{5}_{X_5} + \underbrace{0}_{X_6} + \dots + \underbrace{0}_{X_n} \end{array} \right)$$

$$\text{すると } E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) \quad \text{--- ①}$$

$$\text{ここで } E(X_i) \text{ は } E(X_i) = i \times P(3 \text{ 数に } i \text{ が入る}) + 0 \times P(\text{それ以外})$$

であり

3 数に  $i$  が入る確率は

$$\frac{{n-1 \choose 2}}{{n \choose 3}} = \frac{(n-1)(n-2)/2}{n(n-1)(n-2)/6} = \frac{3}{n}$$

$i$  の他に 2 つ選ぶ

$$\text{すると } E(X_i) = i \cdot \frac{3}{n}$$

$$\begin{aligned} \text{① に代入して } E(X) &= 1 \cdot \frac{3}{n} + 2 \cdot \frac{3}{n} + \dots + n \cdot \frac{3}{n} \\ &= \frac{3}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{3}{2}(n+1) \end{aligned}$$

四 確率変数 X を上手に分解するのを考えよう!

|       |               |               |               |               |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| (2) 数 | 1             | 2             | 3             | 4             |
| 確率    | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

カードを切り出しては戻すのを 4 回くり返す

試行の回数  $i$  カードの数が  $i$  である回数  $X_i$  を X とする。

例えば

|    |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|
| 回目 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 数  | 4 | 3 | 3 | 4 |

のときは  $X=2$

このとき

$$X_i = \begin{cases} 1 & (i \text{ 回目} \text{ が } i \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

回数カウンタ

( $i = 1, 2, 3, 4$ ) とおく

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

すると  $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) \quad \text{--- ①}$  である

したがって  $E(X_i)$  は  $E(X_i) = 1 \cdot P(i \text{ 回目} \text{ が } i) + 0 \cdot P(\text{それ以外})$

なので ① より

$$E(X) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

(504)(3)

n 打席の間にヒットを打つ本数 X の期待値は?

$$X_i = \begin{cases} 1 & (i \text{ 打席目} \text{ は ヒット}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ) とすると

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

すると

$$E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_n) \quad \text{--- ①}$$

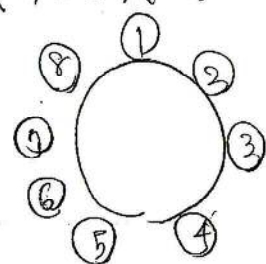
したがって  $E(X_i)$  は

$$\begin{aligned} E(X_i) &= 1 \cdot P(i \text{ 打席目} \text{ は ヒット}) + 0 \cdot P(\text{それ以外}) \\ &= 1 \cdot \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\text{① より } E(X) = \frac{2}{5}n$$



(506)(3)



男4人 ( $m_1, m_2, m_3, m_4$ )

女4人 ( $f_1, f_2, f_3, f_4$ )

が無作為にある

そのとき、両隣が女であるような

男の人数  $X$  の期待値は?

$$X_i = \begin{cases} 1 & (m_i \text{ の両隣が女}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

( $i = 1, 2, 3, 4$ ) をおく

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

$$\therefore E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_4)$$

1, 2, 3, 4  $E(X_i)$  は

$$E(X_i) = 1 \cdot p(m_i \text{ の両隣が女}) + 0 \cdot (\text{それ以外})$$

2人あり、 $m_i$  の両隣が女となる確率は



$m_i$  以外の  
7人のうち  
左隣以外の女性

$f_1 \sim f_4$  のうち

$$\therefore \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$$

よって

$$E(X) = \frac{2}{7} \times 4 = \frac{8}{7}$$