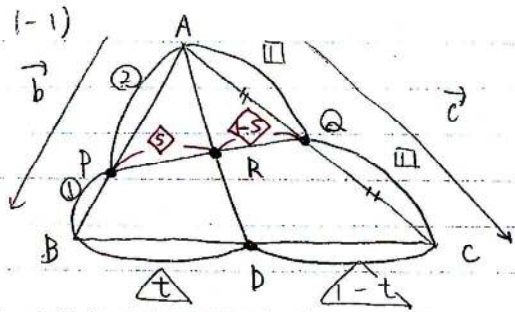


1日目

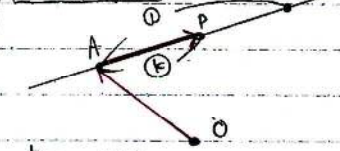
§1 ベクトルI



1) 点の位置ベクトルを求めるには
基底となるベクトルを用いて
2通りに表し、
($\vec{b}$ + $\vec{c}$ の形「一次結合」)
係数比較するのが基本

平面なら2本 (三角形を成す)
空間なら3本 (四面体を成す)

共線条件



点Pの位置ベクトルは

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \vec{OA} + \vec{AP} \\ &= \vec{OA} + k\vec{AB} \\ &= \vec{OA} + k(\vec{OB} - \vec{OA}) \\ &= (1-k)\vec{OA} + k\vec{OB}\end{aligned}$$

RはAD上にあるので、ある実数kを用いて
 $\vec{AR} = k\vec{AD}$ と表せる。

こゝで

$$\vec{AD} = (1-t)\vec{b} + t\vec{c}$$

だから代入して

$$\vec{AR} = k(1-t)\vec{b} + kt\vec{c} \quad \text{--- ①}$$

一方でRはPQ上にもあるので

$$PR:RQ = S:1-S$$

とすると、

$$\vec{AR} = (1-S)\vec{AP} + S\vec{AQ}$$

問題文より

$$\vec{AP} = \frac{2}{3}\vec{b}, \vec{AQ} = \frac{1}{2}\vec{c}$$

だから代入して

$$\vec{AR} = \frac{2}{3}(1-S)\vec{b} + \frac{1}{2}S\vec{c} \quad \text{--- ②}$$

$\vec{b}, \vec{c}$ は一次独立なので、①, ②の
対応する係数は等しい。

よって

$$\begin{cases} k(1-t) = \frac{2}{3}(1-S) \\ kt = \frac{1}{2}S \end{cases}$$

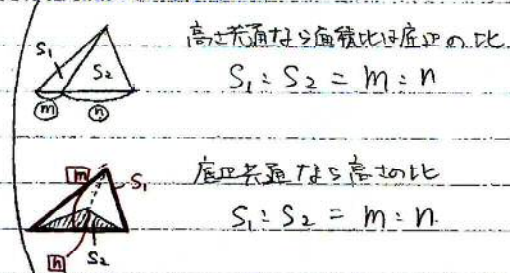
これを解いて

$$\begin{cases} k = \frac{2}{t+3} \\ S = \frac{4t}{t+3} \end{cases}$$

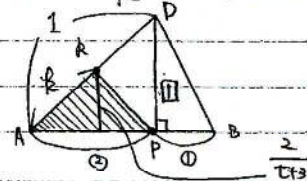
も導かれるので① or ② に代入し

$$\vec{AR} = \frac{2(1-t)}{t+3}\vec{b} + \frac{2t}{t+3}\vec{c}$$

(2) 三角形の面積比



1) より $k = \frac{2}{t+3}$ に注意すると

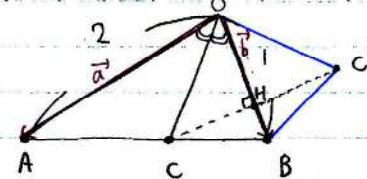


$$\begin{aligned}\Delta APR &= \frac{AP}{AB} \times \frac{AR}{AD} \times \Delta ABD \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{t+3} \times \Delta ABP \\ &= \frac{4}{3(t+3)} \times \Delta ABD \\ &= \frac{4t}{3(t+3)} \Delta ABC\end{aligned}$$

よって問題文より ΔAPR が ΔABC の $\frac{1}{9}$ 倍に
なるときの t は

$$\frac{4t}{3(t+3)} = \frac{1}{9} \quad \therefore t = \frac{3}{7}$$

1-2)



1) OC は $\angle AOB$ の二等分線なので
角の二等分線と比の定理 * より



$$OA:OB = AC:CB$$

$$\therefore AC:CB = 2:1$$

より

$$\vec{OC} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \quad \text{--- ①}$$

(2) 平面ベクトルの計量

基底 $\vec{a}, \vec{b}$ があてはまれているとき

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{a} (=|\vec{a}|^2) \\ \vec{b} \cdot \vec{b} (=|\vec{b}|^2) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} \end{cases}$$

の値がわかっていれば、

2つのベクトル同士の内積は
"かけ算の要領" で計算できる。

問題文より $OA=2, OB=1$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{2}{3} \text{ から } |\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1$$

よって

$$\begin{aligned}\vec{b} \cdot \vec{b} &= 1 \\ \vec{b} \cdot \vec{OC} &= \vec{b} \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \right) \\ &= \frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{2}{3}|\vec{b}|^2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot 1^2 \\ &= \frac{8}{9}\end{aligned}$$

3) HはOB上にあるので

$$\vec{OH} = k\vec{b}$$

と表せる。又、HはCからOBに下ろした
垂線の足なので

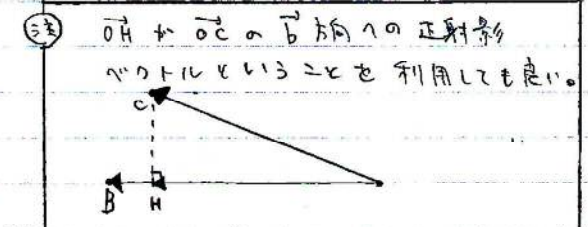
$$CH \perp OB$$

なのでこれより

$$\vec{CH} \cdot \vec{OB} = 0 \quad (\text{垂直条件})$$

$$\begin{aligned}\therefore (\vec{OH} - \vec{OC}) \cdot \vec{b} &= 0 \\ \therefore (k\vec{b} - \vec{OC}) \cdot \vec{b} &= 0 \\ \therefore k|\vec{b}|^2 - \vec{b} \cdot \vec{OC} &= 0 \\ \therefore k = \frac{\vec{b} \cdot \vec{OC}}{|\vec{b}|^2} &= \frac{\frac{8}{9}}{1} \quad \leftarrow 12) \text{の結果} \\ &= \frac{8}{9}\end{aligned}$$

$$\therefore \vec{OH} = \frac{8}{9}\vec{b}$$

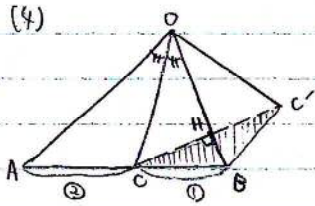


$$\vec{b} \cdot \vec{OC} = |\vec{b}| \times (\vec{OC} \text{ の } \vec{b} \text{ 方向への符号付き長さ})$$

$$= |\vec{b}| \times |\vec{OH}|$$

$$\therefore \frac{8}{9} = 1 \times |\vec{OH}|$$

$$\therefore |\vec{OH}| = \frac{8}{9}$$



$\triangle OBC$ の面積を S とすると
 $\triangle OCH$ の面積は $\triangle OBC$ の $\frac{1}{9}$ である。
 $S = 2 \times \triangle OCH$

$$\triangle OCH = \frac{1}{9} \triangle OAB$$

$$= \frac{1}{9} \times \frac{1}{3} \triangle OAB$$

$$= \frac{1}{27} \triangle OAB$$

$$\therefore S = \frac{2}{27} \triangle OAB$$

面積公式

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{OA}|^2 |\vec{OB}|^2 - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})^2}$$

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2^2 \cdot 2^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore S = \frac{2}{27} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{81}$$

$$\triangle OCH = \frac{1}{9} \triangle OAB$$

$$\therefore \triangle OCH \text{ の面積は } \triangle OAB \text{ の } \frac{1}{9} \text{ である。}$$

(3) $\vec{OC}$ について

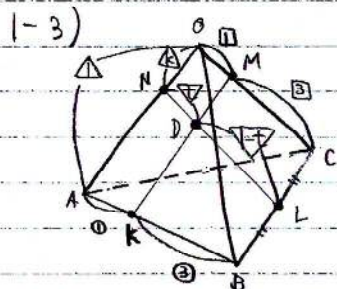
$$\vec{OC} = \vec{OH} + \vec{HC}$$

$$= \vec{OH} + \vec{CH} \quad * \vec{CH} = \vec{HC}$$

$$= \vec{OH} + (\vec{OH} - \vec{OC})$$

$$= 2\vec{OH} - \vec{OC}$$

$$= -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{10}{9}\vec{b}$$



$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ とおく
 $\vec{ON} = k\vec{a}$
 $\therefore$ その交点を D とする
 $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ と同様 2通りで表す)

$$\vec{OD} = (1-s)\vec{OM} + s\vec{OK}$$

$$= (1-s)\left(\frac{1}{4}\vec{c}\right) + s\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right)$$

$$= \frac{1-s}{4}\vec{c} + \frac{2s}{3}\vec{a} + \frac{s}{3}\vec{b}$$

$$= \frac{2}{3}s\vec{a} + \frac{1}{3}s\vec{b} + \frac{1-s}{4}\vec{c} \dots ①$$

$$\vec{OD} = (1-t)\vec{ON} + t\vec{OL}$$

$$\therefore \vec{OD} = k\vec{a}$$

$$\vec{OL} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$= (1-t)k\vec{a} + t\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$= k(1-t)\vec{a} + \frac{1}{2}t\vec{b} + \frac{1}{2}t\vec{c} \dots ②$$

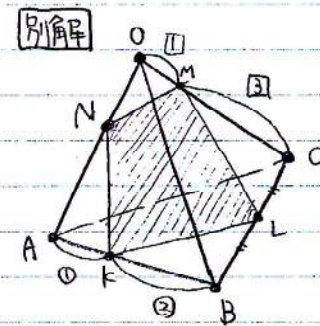
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は 1 次独立なので
 $①, ②$ の対応する係数は等しい。

$$\begin{cases} \frac{2}{3}s = k(1-t) \\ \frac{1}{3}s = \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{4}(1-s) = \frac{1}{2}t \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = \frac{2}{5} \\ s = \frac{3}{7} \\ t = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\therefore \vec{ON} = \frac{2}{5}\vec{a}$$

$$\therefore \vec{ON} : \vec{NA} = \frac{2}{5} : \left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5} : \frac{3}{5} = 2 : 3$$



$\vec{OD} = (1-s)\vec{OM} + s\vec{OK}$
 $\vec{OD} = (1-t)\vec{ON} + t\vec{OL}$

$$\vec{AP} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$$

$$= (1-x-y)\vec{a} + x\vec{b} + y\vec{c}$$

$$\vec{ON} = k\vec{a} \dots ③$$

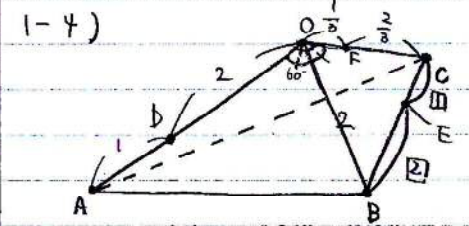
$$\vec{ON} = (1-x-y)\vec{a} + x\vec{b} + y\vec{c}$$

$$= \frac{2}{3}(1-x-y)\vec{a} + \frac{1}{3}(2x-2y)\vec{b} + \frac{1}{3}(2x+y)\vec{c} \dots ④$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が 1 次独立であることから
 $③, ④$ の係数を比較して

$$\begin{cases} k = \frac{2}{3}(1-x-y) \\ 0 = \frac{1}{3}(2x-2y) \\ 0 = \frac{1}{3}(2x+y) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} k = \frac{2}{5} \\ x = -\frac{2}{5} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases}$$



(1) 空間ベクトルの計量
 $\vec{a} \cdot \vec{a}, \vec{b} \cdot \vec{b}, \vec{c} \cdot \vec{c}, \vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{b} \cdot \vec{c}, \vec{c} \cdot \vec{a}$
 の値がわかれば 2つのベクトルの
 内積計算 (大きさ、面積 etc...) が可能

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}| \cos \angle AOB$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ$$

$$= 3$$

$$\vec{OB} \cdot \vec{OC} = \frac{1}{3}$$

$$\vec{OC} \cdot \vec{OA} = \frac{3}{2}$$

($|\vec{OA}|=3, |\vec{OB}|=2, |\vec{OC}|=1$)

(2) $\triangle DEF$ の重心を G とすると
 $\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OF})$

($\therefore$ 問題文の条件より
 $\vec{OD} = \frac{2}{3}\vec{OA}, \vec{OE} = \frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{2}{3}\vec{OC}$
 $\vec{OF} = \frac{1}{3}\vec{OC}$ のを代入整理して)

$$= \frac{1}{9}(2\vec{OA} + \vec{OB} + 3\vec{OC})$$

よって
 $\vec{CG} = \vec{OG} - \vec{OC}$
 $= \frac{1}{9}(2\vec{OA} + \vec{OB} - 6\vec{OC}) \dots \textcircled{1}$

よって
 $|\vec{CG}|^2 = \left| \frac{1}{9}(2\vec{OA} + \vec{OB} - 6\vec{OC}) \right|^2$
 $= \frac{1}{81}(4|\vec{OA}|^2 + |\vec{OB}|^2 + 36|\vec{OC}|^2$
 $+ 4\vec{OA} \cdot \vec{OB} - 12\vec{OB} \cdot \vec{OC}$
 $- 24\vec{OC} \cdot \vec{OA})$
 $= \frac{40}{81}$

$$\therefore |\vec{CG}| = \sqrt{\frac{40}{81}} = \frac{2\sqrt{10}}{9} \dots \textcircled{2}$$

(3) $\cos \angle BCG = \frac{\vec{CB} \cdot \vec{CG}}{|\vec{CB}| \cdot |\vec{CG}|} \dots \textcircled{3}$

$\therefore \vec{CB} = \vec{OB} - \vec{OC}$ より
 $|\vec{CB}| = |\vec{OB} - \vec{OC}|$
 $= |\vec{OB}|^2 - 2\vec{OB} \cdot \vec{OC} + |\vec{OC}|^2$

(* を利用して)

$$= 2^2 - 2 \cdot 1 + 1^2 = 3$$

$$\therefore |\vec{CB}| = \sqrt{3}$$

$$\vec{CB} \cdot \vec{CG} = (\vec{OB} - \vec{OC}) \cdot \frac{1}{9}(2\vec{OA} + \vec{OB} - 6\vec{OC})$$

($\therefore \textcircled{1}$ を代入)

$$= \frac{1}{9}(2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + |\vec{OB}|^2 - 6\vec{OB} \cdot \vec{OC}$$

 $- 2\vec{OC} \cdot \vec{OA} - \vec{OB} \cdot \vec{OC} + 6|\vec{OC}|^2)$

(*) を代入して

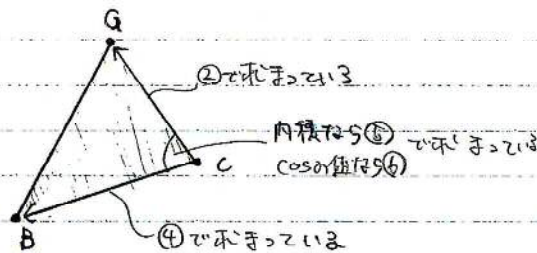
$$= \frac{2}{3}$$

$\dots \textcircled{5}$

$\textcircled{3}$ に $\textcircled{2}, \textcircled{4}, \textcircled{5}$ を代入して

$$\therefore \cos \angle BCG = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{10}}{9}} = \frac{\sqrt{30}}{10} \dots \textcircled{6}$$

(4) $\triangle BCG$ の面積 S は

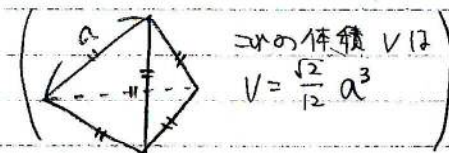


$$\therefore S = \frac{1}{2} BC \cdot CG \cdot \sin \angle BCG$$

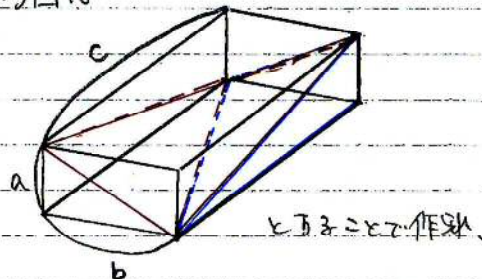
 $(\sin \angle BCG = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BCG} = \frac{\sqrt{70}}{10})$
 $= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{10}}{9} \cdot \frac{\sqrt{70}}{10}$
 $= \frac{\sqrt{21}}{9}$

$$\textcircled{2} S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{CB}|^2 |\vec{CG}|^2 - (\vec{CB} \cdot \vec{CG})^2} \text{ 可}$$

1-5) 実は(4)は直接求められる。
 問1-5の5つは4面体が
 合同な四面体を4面四面体という。



等四面体は「直方体を削る」ことで作り
 今回は



9面体の長さを a, b, c とおくと
 対角線であるから

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2^2 \\ b^2 + c^2 = \sqrt{7}^2 \\ c^2 + a^2 = 3^2 \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = 1 \\ c = \sqrt{6} \end{cases} \quad (a, b, c > 0)$$

より直方体の体積は

$$a \cdot b \cdot c = 3\sqrt{2}$$

よって $\frac{1}{6} \times (b \times c \times \frac{1}{2}) \times a = \frac{1}{6} abc$

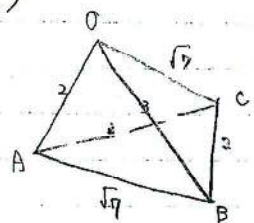
を4つ削りて求める立体の体積 V は

$$V = abc - \frac{1}{6} abc \times 4 = \frac{1}{3} abc$$

 $= \sqrt{2}$

2日目

1-5)



全ての面は 2×3 対の $\sqrt{13}$ ので、
 OA, OB, OC の長さに加えて他の面の長さを
 四のようには決まる

1) まず、 $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3, |\vec{c}|=\sqrt{13}$ 決る。

且 $AB \perp BC$ 注意して

$$|\vec{b}-\vec{a}|=\sqrt{7}$$

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2=7$$

$$\therefore |\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=7$$

$$\therefore 3^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2^2=7$$

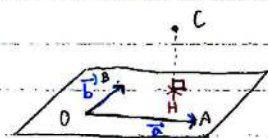
$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=3$$

他も同様にして

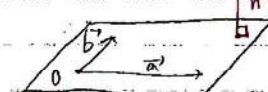
$$|\vec{b}-\vec{c}|^2=2^2 \quad \therefore \vec{b}\cdot\vec{c}=6$$

$$|\vec{c}-\vec{a}|^2=3^2 \quad \therefore \vec{c}\cdot\vec{a}=1$$

12)



平面に垂直なベクトル
 $\vec{c} \perp (\text{平面 } OAB)$ のとき $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$



このとき

$$\vec{c} = \vec{c} - \vec{0} = x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c} \quad \text{①}$$

と書ける。 $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$ (平面 OAB) より

$$\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$$

1) のとき

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \quad \text{②}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{③}$$

①, ② より

$$(x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{a} = 0$$

$$\therefore x|\vec{a}|^2 + y\vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{c}\cdot\vec{a} = 0$$

$$\therefore 4x + 3y - 1 = 0 \quad \text{④}$$

①, ③ より

$$(x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{b} = 0$$

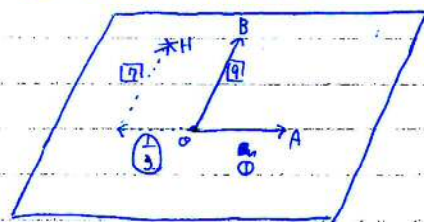
$$\therefore x\vec{a}\cdot\vec{b} + y|\vec{b}|^2 - \vec{c}\cdot\vec{b} = 0$$

$$\therefore x + 3y - 2 = 0$$

④ ⑤ より

$$x = \frac{1}{3}, y = \frac{7}{9}$$

⑥ 以上より $\vec{h}$ の位置を正しくかき



(3), (2) の結果を①に代入して

$$\vec{c} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{7}{9}\vec{b} - \vec{c}$$

$$= \frac{1}{9}(-3\vec{a} + 7\vec{b} - 9\vec{c})$$

よって

$$|\vec{c}|^2 = \left| \frac{1}{9}(-3\vec{a} + 7\vec{b} - 9\vec{c}) \right|^2$$

$$= \frac{8}{3}$$

$$\therefore |\vec{c}| = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

(4) ③の $\vec{c} \perp \vec{a}$ を用いて $\triangle OAB$ を基底として

$$V = \frac{1}{3} \times \triangle OAB \times |\vec{c}|$$

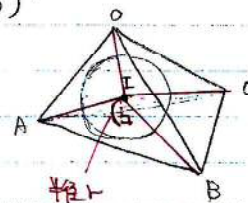
$$\left(\triangle OAB = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2} \right)$$

$$= \frac{3\sqrt{5}}{2} \quad \text{⑦}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{5}}{2} \times \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$= \sqrt{2}$$

(5)



四面体 $OABC$ に内接する球の中心を I とする。

四面体の体積を V 、表面積を S とする。

$$V = (I \text{ から } \triangle OAB \text{ までの高}) + (I \text{ から } \triangle OBC \text{ までの高}) + (I \text{ から } \triangle OCA \text{ までの高}) + (I \text{ から } \triangle ABC \text{ までの高})$$

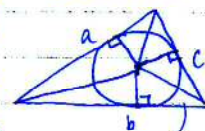
$$= \frac{1}{3} \triangle OAB \cdot r + \frac{1}{3} \triangle OBC \cdot r + \frac{1}{3} \triangle OCA \cdot r + \frac{1}{3} \triangle ABC \cdot r$$

$$= \frac{1}{3} (\triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA + \triangle ABC) \cdot r$$

$$= \frac{1}{3} S \cdot r$$

$$\therefore V = \frac{1}{3} S r$$

球の半径 r は四面体の内接球の半径の平均値と同じ。



$$S = \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot r$$

(4) より、 $V = \sqrt{2}$ 、又 $S = \triangle OAB \cdot 4 = 6\sqrt{3}$

と決まっているので、 r は

$$\sqrt{2} = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot r$$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

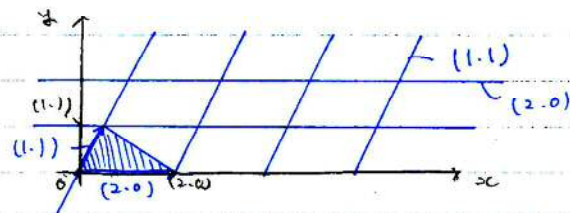
§2 ベクトルⅡ

2-1) 斜交座標

$$\vec{OP} = s\vec{a} + t\vec{b} \quad (\vec{a}, \vec{b} \text{ は一次独立})$$

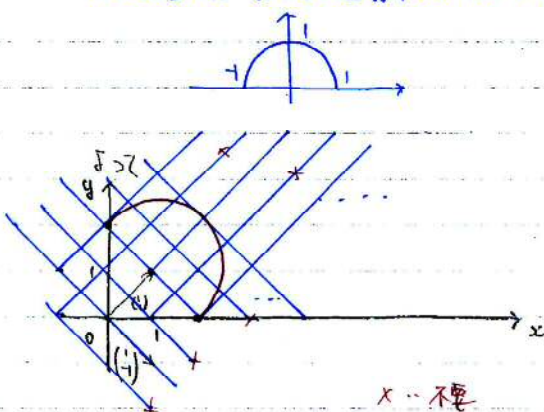
$\vec{a}, \vec{b}$ の基底は $\vec{a}, \vec{b}$ で作られる
 平行四辺形の1マスとする座標系で
 (s, t) と表す(2点)

(1) $\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $t \geq 0, u \geq 0, t+u \leq 1$ は
 $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で作られる平行四辺形を
 1マスとする座標系を考へ



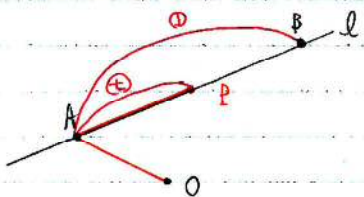
(2) $\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \cos t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $(0 \leq t \leq \pi)$ は $(1, 1)$ を原点として、
 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で作られる正方形を1マス
 とする座標系を考へ、

$(\cos t, \sin t)$ ($0 \leq t \leq \pi$) は x, y 平面では



2-2)

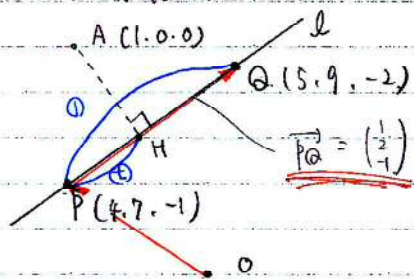
(1) (空間内の) 直線のパラメータ表示



点 A, B を通る直線 l 上の点 P は

$$\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{AB}$$

とパラメータ表示できる。



H は l 上の点なので、

$$\vec{OH} = \vec{OP} + t\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と、実数 t を用いて表せる。

今、H は A から l へおろした垂線の足なので、

$$\vec{AH} \perp \vec{PQ} \quad \therefore \vec{AH} \cdot \vec{PQ} = 0 \dots ②$$

と成り立つ t を求めればよい。

① より、

$$\vec{AH} = \vec{OH} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

したがって②に代入して

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 6t + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -3$$

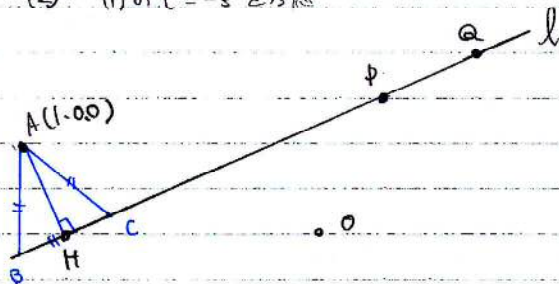
よって H の座標はこれに①に代入して

$$H(1, 1, 2)$$

③

もちろん、 $\vec{PH}$ は $\vec{PA}$ の $\vec{PQ}$ 方向への正射影ベクトルであることを利用して②

(2) (1) の $t = -3$ を考慮



上図より B は H から $\vec{PQ}$ と反対方向に $\frac{\sqrt{5}}{3}$ のキョリに存在する点。C は H から $\vec{PQ}$ と同じ方向に $\frac{\sqrt{5}}{3}$ のキョリに存在する点。

$$\begin{aligned} \vec{OB} &= \vec{OH} + \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right) \frac{1}{|\vec{PQ}|} \vec{PQ} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} \\ 1 - \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} \\ 2 + \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{OC} = \vec{OH} + \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{1}{|\vec{PQ}|} \vec{PQ}$$

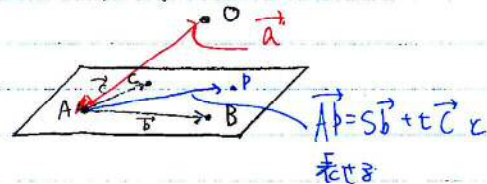
$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} \\ 1 + \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} \\ 2 - \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\therefore B \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}, 1 - \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}, 2 + \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} \right)$$

$$C \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}, 1 + \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}, 2 - \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} \right)$$

2-3) 空間内での平面の表し方

① パラメータ表示

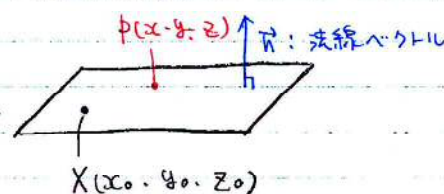


平面上の点 P (x, y, z) は

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{OA} + s\vec{AB} + t\vec{AC}$$

とパラメータ表示できる

② 平面の方程式



点 X (x0, y0, z0) を通り $\vec{n}$ に垂直な

平面上の点 (x, y, z) は、

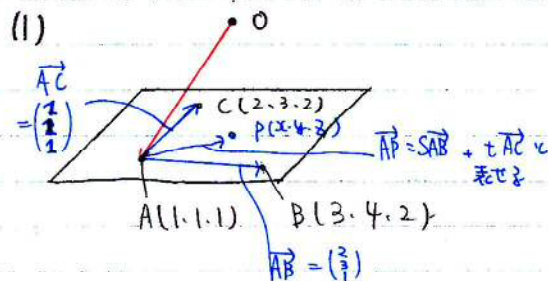
$$\vec{n} \cdot \vec{XP} = 0$$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とすれば、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

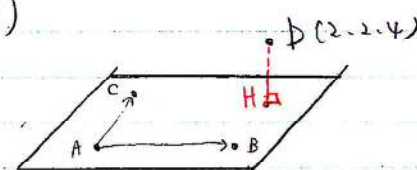
$$\therefore a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

(1)



$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{OA} + s\vec{AB} + t\vec{AC} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2)



H は平面 ABC 上の点なので

$$\vec{OH} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \dots ①$$

よ、かける。

(平面 ABC) $\perp$ DH

より、

$$\vec{DH} \perp \vec{AB}, \vec{DH} \perp \vec{AC}$$

$$\therefore \vec{DH} \cdot \vec{AB} = 0 \dots ②$$

$$\vec{DH} \cdot \vec{AC} = 0 \dots ③$$

① より

$$\vec{DH} = \vec{OH} - \vec{OD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

だから、②に代入して、

$$\therefore \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore -8 + 14s + 9t = 0$$

$$\therefore 14s + 9t = 8 \dots ④$$

③に代入して

$$\therefore \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore -6 + 9s + 6t = 0$$

$$\therefore 3s + 2t = 2 \dots ⑤$$

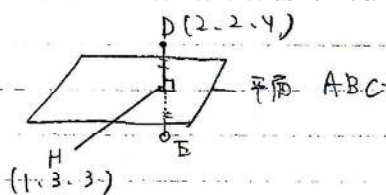
$$\textcircled{4}, \textcircled{5} \text{ より } s = -2, t = 4$$

この値を①に代入し

$$\vec{OH} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore H(1, 3, 3)$$

(3)

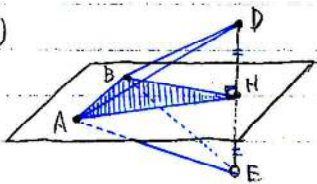


D, E は平面ABCに属する点なので
 $\vec{HE} = \vec{DH} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$... ⑥

$$\therefore \vec{OE} = \vec{OH} + \vec{HE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore E(0, 4, 2)$$

(4)



立体ABDEの体積をVは

四面体ABHDより

*四面体ABHEとABHDは鏡対称の関係

よって

$$V = 2 \times \frac{1}{3} \times \Delta ABH \times DH$$

ここで ΔABH は

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{AH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AH} = 8$$

より

$$\Delta ABH = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AH}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AH})^2}$$

$$= \dots$$

$$= 2\sqrt{3}$$

$$DH \text{ の長さ } \textcircled{6} \text{ より } DH = \sqrt{3}$$

よって V の式に ΔABH , DH を代入し

$$V = 2 \times \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 4$$

2-4)

(1) A(-2, 4, 0), B(0, 2, 4) に対し

$$S \text{ は } \vec{PA} \cdot \vec{PB} = 2$$

を満たす点全体の集合で、P(x, y, z) とおくと

$$\vec{PA} = \begin{pmatrix} -2-x \\ 4-y \\ -z \end{pmatrix}, \vec{PB} = \begin{pmatrix} -x \\ 2-y \\ 4-z \end{pmatrix}$$

なので、代入して

$$\begin{pmatrix} -2-x \\ 4-y \\ -z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x \\ 2-y \\ 4-z \end{pmatrix} = 2$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 8$$

より、S は中心 (-1, 3, 2)

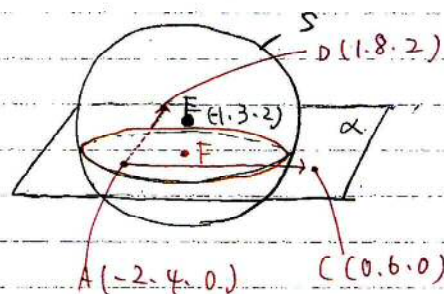
半径 $2\sqrt{2}$ の球の面。又 S の内部は

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 < 8$$

で表され、A(-2, 4, 0) を代入すると

よって A は S の内部。

(2)



S の中心を E, 交円の中心を F とする

F は E から alpha におろした垂線の足である。

よって EF ⊥ alpha

よって EF ⊥ AC, EF ⊥ AB

$$\therefore \begin{cases} \vec{EF} \cdot \vec{AC} = 0 \dots \textcircled{1} \\ \vec{EF} \cdot \vec{AB} = 0 \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

又、F は alpha 上

$$\vec{AF} = s \vec{AC} + t \vec{AB} \dots \textcircled{3} \text{ と表せる}$$

よって ③ より

$$\begin{aligned} \vec{EF} &= \vec{AF} - \vec{AE} \\ &= s \vec{AC} + t \vec{AB} - \vec{AE} \\ &= s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

これを ①, ② に代入して、

$$\vec{EF} \cdot \vec{AC} = 0 \Leftrightarrow \dots$$

$$\Leftrightarrow 4s + 7t = 0$$

$$\vec{EF} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow \dots$$

$$\Leftrightarrow 14s + 29t = 0$$

これを解いて

$$s = -\frac{7}{6}, t = \frac{2}{3}$$

よって、③ より

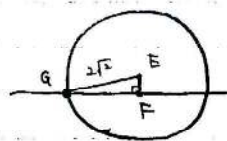
$$\begin{aligned} \vec{AF} &= -\frac{7}{6} \vec{AC} + \frac{2}{3} \vec{AB} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore \vec{OF} = \vec{OA} + \vec{AF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{13}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

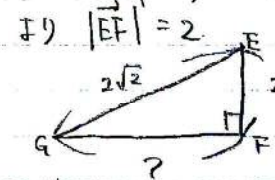
$$\therefore F\left(-\frac{7}{3}, \frac{13}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

又、交円の半径は



← 断面図

$$\vec{EF} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad t \pm 3$$

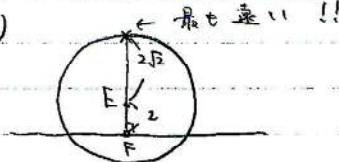


交円上の点 G とし、 ΔEFG は

直角二等辺三角形。

$$\therefore 2(\text{円の半径}) = EG = 2$$

(3)



S 上の点 H から alpha から最も遠くなるのは、上図のように

FEH が一直線上にあるとき。

つまり、H は、

E から EF と反対方向に $2\sqrt{2}$ だけ移動

$$\therefore \vec{OH} = \vec{OE} + (-2\sqrt{2}) \frac{1}{|\vec{EF}|} \vec{EF}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 + \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ 3 - \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

$$\therefore H\left(-1 + \frac{4\sqrt{2}}{3}, 3 - \frac{4\sqrt{2}}{3}, 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

3日目

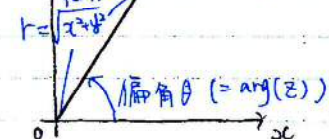
3 複素数 I

3-1)

複素数の極座標形式

複素数 $z = x + yi$ に対して

$z = x + yi$

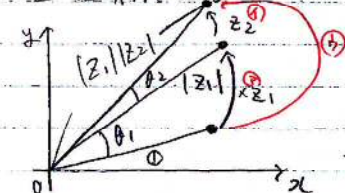


上の r, θ を用いて

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

という形で表すことができ、これを

複素数の極形式という。



複素数平面上で

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

すなわち、 r_1 倍 θ_1 回転の

回転相似拡大を意味するの、

さらに

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

すれば、

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

又、オイラーの公式

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

$$\{r(\cos \theta + i \sin \theta)\}^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

r 倍 θ 回転を n 回 r^n 倍 $n\theta$ 回転

1) $z = -1 - \sqrt{3}i$

$$z = 2(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi)$$

$$w = \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$$

2) $z^{10} = \{2(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi)\}^{10}$
 $= 1024(\cos \frac{40}{3}\pi + i \sin \frac{40}{3}\pi)$
 $= 1024(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi)$

$$\begin{aligned} \text{又、} \left(\frac{z}{w}\right)^{50} &= \left(\frac{2(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi)}{2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})}\right)^{50} \\ &= \left\{\cos\left(\frac{4}{3}\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{4}{3}\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right\}^{50} \\ &= \left(\cos \frac{13}{12}\pi + i \sin \frac{13}{12}\pi\right)^{50} \\ &= \left(\cos\left(\frac{13}{12}\pi \times 50\right) + i \sin\left(\frac{13}{12}\pi \times 50\right)\right) \\ &= \cos \frac{325}{6}\pi + i \sin \frac{325}{6}\pi \\ &= \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

3) $z^4 = -8(1 + \sqrt{3}i)$ の 4 つの解を

極形式を用いて求める。

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

$$\begin{aligned} -8(1 + \sqrt{3}i) &= 8(-1 - \sqrt{3}i) \\ &= 16\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= 2^4(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi) \end{aligned}$$

より、

$$r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = 2^4(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi)$$

絶対値・偏角について

$$r^4 = 2^4 \therefore r = 2 (> 0)$$

偏角について

$$4\theta = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \quad (k: \text{整数})$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}\pi + \frac{k\pi}{2}$$

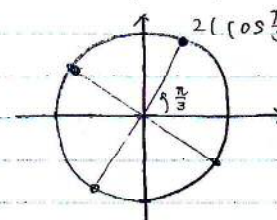
より $k = 0, 1, 2, 3$ まで直す。

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{11}{3}\pi$$

したがって

$$\begin{aligned} z &= 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = 1 + \sqrt{3}i \\ z &= 2(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi) = \sqrt{3} - i \\ z &= 2(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi) = -1 - \sqrt{3}i \\ z &= 2(\cos \frac{11}{3}\pi + i \sin \frac{11}{3}\pi) = \sqrt{3} - i \end{aligned}$$

(注) = の角を複素数平面上に図示すると。



3-3)

1. n 乗根

$$z^n = 1 \text{ の解は}$$

$$z = \cos \frac{2k}{n}\pi + i \sin \frac{2k}{n}\pi$$

($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$)

1) $\alpha = \cos \theta + i \sin \theta = \cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9}$

とすると、

$$\alpha^{18} = \cos \frac{18}{9}\pi + i \sin \frac{18}{9}\pi = 1$$

したがって、

$$\alpha^{18} - 1 = 0$$

$$\therefore (\alpha - 1)(\alpha^{17} + \alpha^{16} + \dots + \alpha + 1) = 0$$

$\alpha \neq 1$ より、

$$\therefore \alpha^{17} + \alpha^{16} + \dots + \alpha + 1 = 0$$

$$\therefore f(\alpha) = 0$$

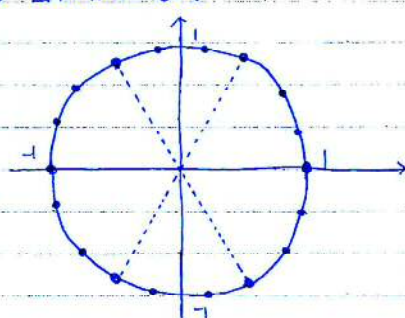
2) $A = \sum_{k=0}^{17} \sin k\theta$

$$= (\sin 0) + \sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin 17\theta$$

1) $f(\alpha) = \alpha^{17} + \dots + 1$ の虚部は 0

$$f(\alpha) = 0 \Rightarrow \text{虚部} = 0 \Rightarrow A = 0$$

② 図形上の点を見れば、



3) $B = \sum_{k=1}^9 \cos 2k\theta = \cos 2\theta + \cos 4\theta + \dots + \cos 18\theta$

の値は

$$\beta = \alpha^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$$

とすると、 $\beta^9 = 1$

$$\beta^9 = 1$$

とすると、

$$(\beta - 1)(\beta^8 + \beta^7 + \dots + \beta^2 + \beta + 1) = 0$$

$\beta \neq 1$ より

$$\beta^8 + \beta^7 + \dots + \beta^2 + \beta + 1 = 0$$

実部について

$$\cos 16\theta + \cos 14\theta + \dots + \cos 4\theta + \cos 2\theta + 1 = 0$$

$$\therefore 2B + 1 = 0$$

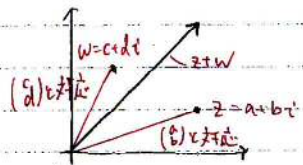
$$\therefore B = -\frac{1}{2}$$

$\theta = \frac{\pi}{9}$ より
 $18\theta = 2\pi$

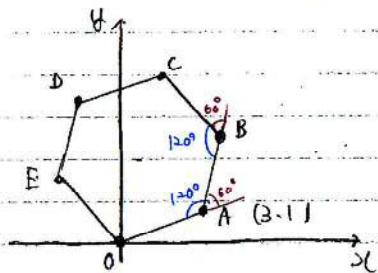
3-2)

※複素数平面上で

$z = a + bi$, $w = c + di$ は
点を表すが、さらに、 $z + w$ といつて
計算はベクトルの計算と同様に扱える



(さらに回数をこなせるから) 平面ベクトルより便利



複素数平面とみなして考えよ

A(3, 1) は $3 + i$ に対応し

この下で B ~ F を表す複素数を求めよ

B は

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$$

$\vec{AB}$ は $\vec{OA}$ を $\frac{1}{2}$ 回転して得られる
つまり
 $(3+i)(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$
 $= \frac{3-i}{2} + \frac{1+3i}{2} i$

よって対応する複素数は

$$(3+i) + \left(\frac{3-i}{2} + \frac{1+3i}{2} i \right)$$

$$= \frac{9-i}{2} + \frac{3+3i}{2} i$$

$$\text{よって } B \left(\frac{9-i}{2}, \frac{3+3i}{2} \right)$$

又 C は

$$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC}$$

よって対応する複素数は

$$\left(\frac{9-i}{2} + \frac{3+3i}{2} i \right) + \frac{3-i}{2} + \frac{1+3i}{2} i$$

$$= (3-i) + (1+3i)i$$

よって

$$C(3-i, 1+3i)$$

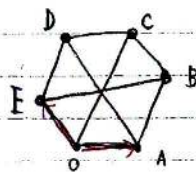
あるいは

$$\vec{CB} = -\vec{OA}, \vec{OE} = \vec{BC}$$

を利用して

$$D(-i, 3i), E\left(\frac{3-i}{2}, \frac{-1+3i}{2}\right)$$

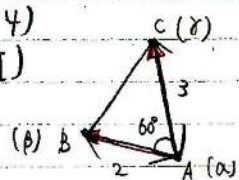
(注)



↑ c → のみでとける

3-4)

(I)



$$1) |\beta - \alpha| = |\vec{AB}| = 2$$

$$2) \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \text{ の値は } \dots ??$$

← $\vec{AC}$ は $\vec{AB}$ の 1/2 倍

$$\vec{AC} \text{ は } \vec{AB} \text{ を } -60^\circ \text{ 回転して } \frac{1}{2} \text{ 倍して得られる}$$

よって

$$\gamma - \alpha = (\beta - \alpha) \times \frac{1}{2} (\cos(-60^\circ) + i \sin(-60^\circ))$$

$$\text{よって } \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

(II) (2) のみ

$$4\alpha^2 + 5\beta^2 + \gamma^2 - 8\alpha\beta - 2\beta\gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow (4\alpha^2 - 8\alpha\beta + \beta^2) + (\gamma^2 - 2\beta\gamma + \beta^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \{2(\alpha - \beta)\}^2 + (\gamma - \beta)^2 = 0$$

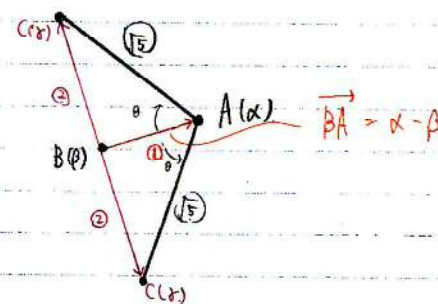
$$\Leftrightarrow (\gamma - \beta)^2 = -\{2(\alpha - \beta)\}^2$$

$$\Leftrightarrow (\gamma - \beta) = \pm 2i(\alpha - \beta)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta} \right)^2 = -2^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta} = \pm 2i$$

よって



上図より

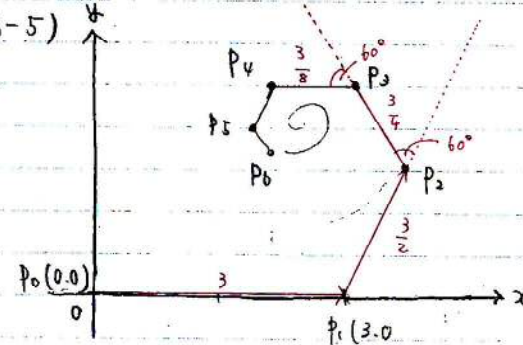
$$|\beta - \alpha| = |\gamma - \beta| = |\alpha - \gamma|$$

$$= 1 : 2 : \sqrt{3}$$

1) 答のみ

$$|\pm 2i|$$

3-5)



この平面を複素数平面とみなして考えよ

 P_n, P_{n+1} は対応する複素数 z_n と z_{n+1} $z_0 = 3$ と P_n, P_{n+1} は $\frac{1}{2}$ 倍 60° 回転する z_n と z_{n+1}

よって

$$z_{n+1} = z_n \times \frac{1}{2} (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$$

$$= \frac{1+i\sqrt{3}}{4} z_n = w z_n$$

よって

$$1) L_n = |\vec{AP_0}| + |\vec{AP_1}| + \dots + |\vec{AP_{n-1}}|$$

$$= |z_0| + |z_1| + \dots + |z_{n-1}|$$

よって $z_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ のとき

$$|z_n| = |z_0| \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= 3 + 3 \times \frac{1}{2} + \dots + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{3 - 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 6 - 6 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = 6$$

(2) $n \rightarrow \infty$ のとき P_n の近づく点 P_n を表す複素数を z_n とする

$$\vec{OP_n} = \vec{OP_0} + \vec{P_0P_1} + \vec{P_1P_2} + \dots + \vec{P_{n-1}P_n}$$

$$z_n = z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1}$$

(z_n は (1) の初項 $z_0 = 3$ と比 w の等比数列を成す)

$$= 3 + 3w + \dots + 3w^{n-1}$$

$$= \frac{3 - 3w^n}{1 - w}$$

 $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |w^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - 3w^n}{1 - w}$$

$$= \frac{3}{1 - w}$$

$$w = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i$$

$$\text{よって } P \text{ は } (3, \sqrt{3}) \text{ 付近にある}$$

4日目

3-b)

1) 絶対値

$$z = x + yi \text{ に対し, } |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ と表す}$$

z, w : 複素数に対し

(性質)

$$\begin{aligned} & z \cdot \bar{z} = |z|^2 \\ & |z| |w| = |zw| \end{aligned}$$

(本題)

$$x + yi = (3 + 2i)^{100} \text{ のとき, } x^2 + y^2 \text{ の値は?}$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}^2 = |x + yi|^2$$

両辺の絶対値をとり

$$|x + yi| = |(3 + 2i)^{100}|$$

$$= |3 + 2i|^{100}$$

$$\therefore \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{13}^{100}$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 13^{100}$$

(2) z の方程式 $z^n + z - 1 = 0$ について

絶対値 1 の複素数を解にもつとる。

このとき

$$\begin{cases} \alpha^n + \alpha - 1 = 0 \quad \dots ① \\ |\alpha| = 1 \quad \dots ② \end{cases}$$

$$|\alpha| = 1 \quad \dots ②$$

①より

$$\alpha^n = 1 - \alpha$$

両辺の絶対値をとり

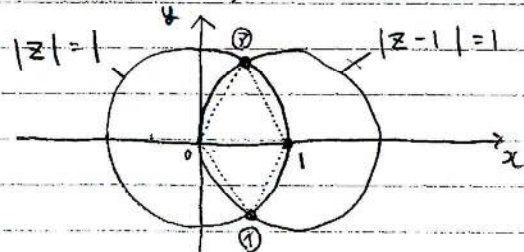
$$|\alpha^n| = |1 - \alpha|$$

$$\therefore |\alpha|^n = |\alpha - 1|$$

$$\therefore |\alpha - 1| = 1 \quad \dots ③ (\because ②)$$

(i) ②, ③より $z = \alpha$ は $|z| = 1$ かつ $|z - 1| = 1$

を満たすところから、



よって α としてありうるのは

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \dots ④ \end{aligned}$$

(ii) ④を①に代入し

③のとき

$$(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})^n + (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Leftrightarrow (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})^n = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} = \cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi$$

よって

$$\frac{n\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \quad (k: \text{整数})$$

$\therefore$

$$n = 6k + 5 \quad (\therefore n \equiv 5 \pmod{6})$$

①のとき

$$(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi)^n + (\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi) - 1 = 0$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\therefore (\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi)^n = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \cos \frac{5n\pi}{3} + i \sin \frac{5n\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

よって

$$\frac{5n\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k'\pi \quad (k': \text{整数})$$

$$\therefore 5n = 6k' + 1$$

$$\therefore 5n \equiv 1 \pmod{6}$$

よって

$$\begin{array}{c|cccccc} n & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 5n & 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\therefore n \equiv 5 \pmod{6}$$

$$\therefore n \equiv 5 \pmod{6}$$

以上からいづれの場合も

$$n \equiv 5 \pmod{6}$$

§4 複素数Ⅱ

複素数平面上で式の表す図形

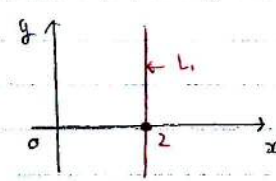
○ 慣れないときは $z = x + yi$ を代入して

x, y の式をつくる

○ 慣れたら その式変形、図形的に見る

4-1)

(1) $L_1: \operatorname{Re}(z) = 2$



(2) $L_2: z + \bar{z} = 4$

$$\rightarrow \frac{z + \bar{z}}{2} = 2$$

$$\rightarrow \operatorname{Re}(z) = 2$$

よって L_2 は L_1 と同じ。

(3) $L_3: \left| \frac{z-3}{z-3i} \right| = 1 \quad \dots ①$

(本題)

$z = x + yi$ と代入

$$\textcircled{1} \text{ より } |z-3| = |z-3i| \quad \dots ①'$$

これに代入する

$$|(x+yi)-3| = |(x+yi)-3i|$$

$$\therefore |(x-3)+yi| = |x+(y-3)i|$$

$$\therefore \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$$

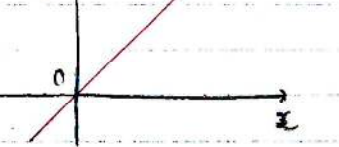
両辺を乗して

$$(x-3)^2 + y^2 = x^2 + (y-3)^2$$

$$\therefore x^2 - 6x + 9 + y^2 = x^2 + y^2 - 6y + 9$$

$$\therefore y = x$$

よって L_3 は



図より $\arg z = \pi$ といえる。コレ88

(本題)

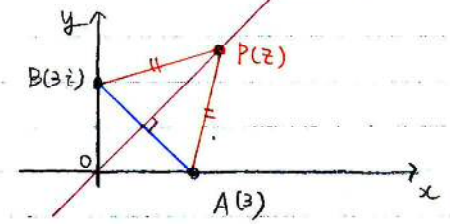
図形的な解釈

①' は $A(3)$, $B(3i)$ $P(z)$ とおく

$$PA = PB$$

P は A, B から等距離にある点の集まり

つまり L_3 は線分 AB の垂直二等分線。



(4) $L_4: \arg \left(\frac{z-1}{z+1} \right) = \pi$

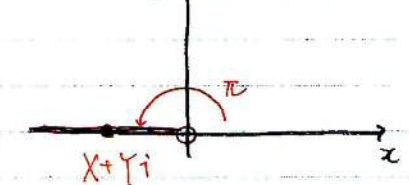
(本題) $z + yi$ を代入

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{(x+yi)-1}{(x+yi)+1} = \dots$$

$$= \frac{x+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} + \frac{2y}{(x+1)^2+y^2}i$$

$$= \frac{x+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} + \frac{2y}{(x+1)^2+y^2}i$$

よって $\arg z = \pi$ といえる。

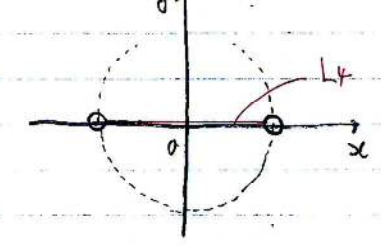


つまり $X < 0$ かつ $Y = 0$ を満たしている。

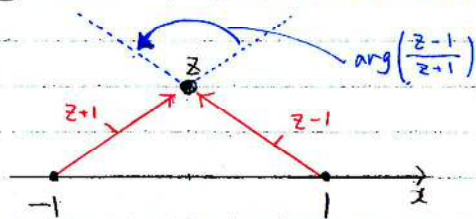
$(x, y) \neq (-1, 0)$ の下 (分母 $\neq 0$)

$$x^2 + y^2 - 1 < 0 \text{ かつ } 2y = 0$$

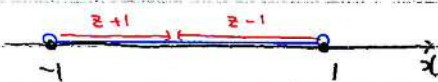
よって



★方針2 図形的解釈 (H4.13) H4.26) 参考)

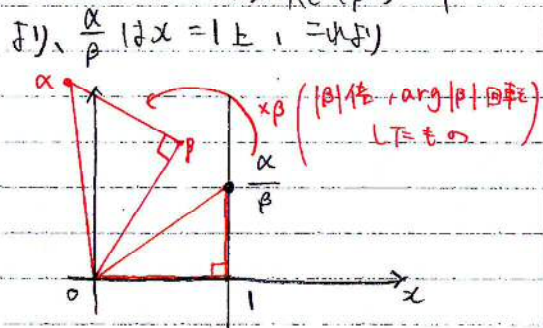


より, $\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \pi$ は



(II) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} = 2 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = 2$
 $\Leftrightarrow 2 \operatorname{Re}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = 2$

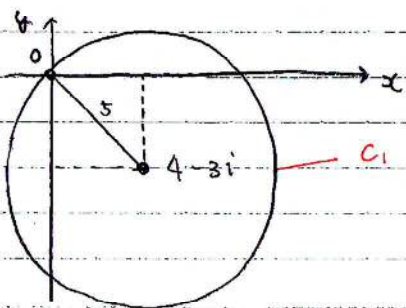
$\Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = 1$



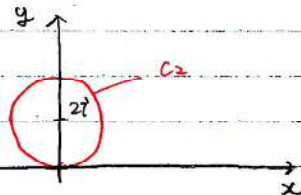
$\angle O\beta\alpha = \frac{\pi}{2}$ の直角 $\Rightarrow$ 角分ク

4-2)

(I) $C_1: |z-4+3i| = 5$



(2) $C_2: z \cdot \bar{z} - 2i\bar{z} + 2i z = 0$
 $\Leftrightarrow (z-2i)(\bar{z}-2\bar{i}) - |2i|^2 = 0$
 $\Leftrightarrow (z-2i)(\bar{z}-2\bar{i}) = |2i|^2$
 $\Leftrightarrow |z-2i|^2 = 4$
 $\Leftrightarrow |z-2i| = 2$



* 中心 α , 半径 r の円は $|z-\alpha|=r$
 $\hookrightarrow$ 表す $\hookrightarrow$ 両辺2乗する
 $|z-\alpha|^2 = r^2 \Leftrightarrow (z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha}) = r^2$
 $\Leftrightarrow (z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha}) = r^2$
 $\Leftrightarrow z \cdot \bar{z} - \alpha \cdot \bar{z} - \alpha \bar{z} + |\alpha|^2 = r^2$
 $\Leftrightarrow z \cdot \bar{z} - \alpha \bar{z} - \alpha \bar{z} + |\alpha|^2 - r^2 = 0$

おいて
おくと
便利。
式を見て
はいはいの
図形の
形が
わかる

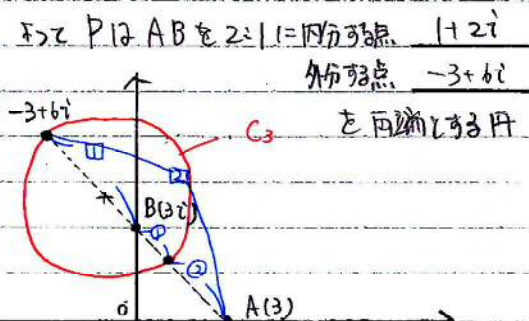
つまり
 α : 複素数, β : 実数 $\hookrightarrow$ (基本的には)
 $z \cdot \bar{z} - \alpha \bar{z} - \alpha \bar{z} + \beta = 0$
 $\hookrightarrow$ 円を表す

(3) $C_3: \left| \frac{z-3}{z-3i} \right| = 2$
 $\therefore |z-3| = 2|z-3i|$

★方針1 $z = x+yi$ を代入

★方針2 図形的解釈

$A(3), B(3i)$ $P(z)$ とおくと $\frac{PA}{PB} = 2$
 $PA = 2PB \Leftrightarrow PA:PB = 2:1$
 $\hookrightarrow$ 分点の軌跡



★方針3 z の形式変形

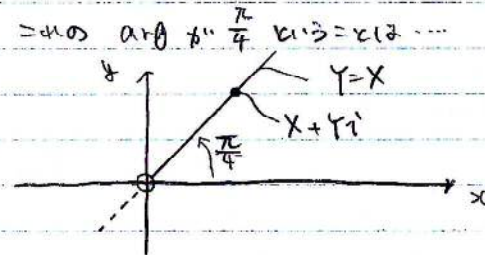
① の両辺を2乗して

$|z-3|^2 = 4|z-3i|^2$
 $\Leftrightarrow (z-3)(\bar{z}-3) = 4(z-3i)(\bar{z}-3\bar{i})$
 $\Leftrightarrow (z-3)(\bar{z}-3) = 4(z-3i)(\bar{z}-3\bar{i})$
 $\Leftrightarrow z \cdot \bar{z} - 3z - 3\bar{z} + 9 = 4(z \cdot \bar{z} - 3i z - 3\bar{i} \bar{z} + 9)$
 $\Leftrightarrow 3z \cdot \bar{z} + (3+12i)z + (3-12i)\bar{z} + 27 = 0$
 $\Leftrightarrow z \cdot \bar{z} + (1+4i)z + (1-4i)\bar{z} + 9 = 0$
 $\Leftrightarrow (z+(1-4i))(\bar{z}+(1-4i)) - 17 + 9 = 0$
 $\Leftrightarrow |z+(1-4i)|^2 = 8$
 $\Leftrightarrow |z+(1-4i)| = 2\sqrt{2}$
 $\therefore C_3$ は中心 $-1+4i$, 半径 $2\sqrt{2}$ の円

(4) $C_4: \arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{4}$

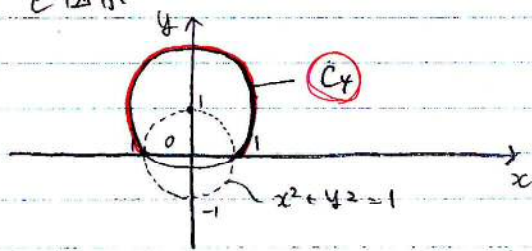
★方針1 $z = x+yi$ を代入

$\frac{z-1}{z+1} = \dots = \frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} + \frac{2y}{(x+1)^2+y^2}i$



つまり $x>0, y>0$ $y=x$ を満たせばいい。
 $\hookrightarrow$ これを計算して

$\begin{cases} x^2+y^2 > 1, y > 0 \\ x^2+y^2 - 2y - 1 = 0 \end{cases}$
 $\hookrightarrow$ 図示



4-3)

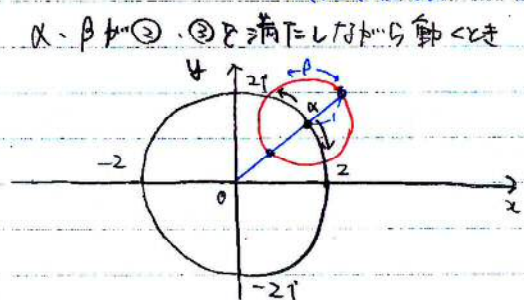
(1) $\alpha' = \frac{\alpha}{|\alpha|^2} = \frac{\alpha}{\alpha \cdot \bar{\alpha}} = \frac{1}{\bar{\alpha}}$
 $\beta' = \frac{1}{\bar{\beta}}$

よって

$|\alpha' - \beta'| = \left| \frac{1}{\bar{\alpha}} - \frac{1}{\bar{\beta}} \right|$
 $= \left| \frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}} \right|$
 $= \frac{|\bar{\beta} - \bar{\alpha}|}{|\alpha| |\beta|}$
 $= \frac{|\alpha - \beta|}{|\alpha| |\beta|} \quad \dots ①$

(2) $|\alpha - \beta| = 1, |\alpha| = 2$ とする。このとき

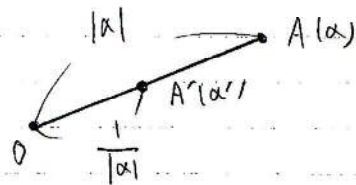
$|\alpha' - \beta'| = \frac{1}{2|\beta|}$ (おいて $|\beta|$ が ③, ③で
満たす z の max, min
を求めれば OK)



$1 \leq |\beta| \leq 3$ として $|\alpha' - \beta'|$ は

Max $\frac{1}{2}$, min $\frac{1}{6}$
 $\uparrow$ $|\beta|=1$ $\uparrow$ $|\beta|=3$

③ 例えは $A(\alpha)$ $A'(\alpha')$ とする。
 α' は $\alpha = f(z) = \frac{1}{z}$ という変換 f を
 施した α に対応している。



半直線 $OA \perp OA' = 1$ となる。
 A' を基底させる。(反転という)

4-4) & 4-5) 複素数平面上の変換

z : 複素数に対して $w = f(z)$ の描く図形
 を求めるときの主な手帳について石巻記述

4-4(1): $z = x + yi$ を代入しパラメータ曲線法

(2): 直接図形的意味で考える(順像法)

4-5(1): z の範囲で考える(逆像法)

4-4)

(1) $z = 1 + ti$ ($-1 \leq t \leq 1$) のとき

$w = f(z) = w^2$ の軌跡は?

$$w = (1 + ti)^2 \\ = (1 - t^2) + 2ti$$

つまり $w = x + yi$ とすると

$$\begin{cases} x = 1 - t^2 \dots \textcircled{1} \\ y = 2t \dots \textcircled{2} \end{cases} \quad (-1 \leq t \leq 1) \textcircled{3}$$

と表せるパラメータ曲線法とわかる。

よって②より

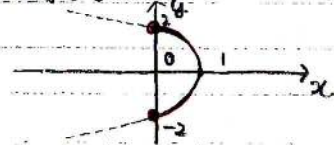
$$t = \frac{y}{2}$$

これを①・③に代入

$$x = 1 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 \quad \left(-1 \leq \frac{y}{2} \leq 1\right)$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{y^2}{4} + 1 \quad (-2 \leq y \leq 2)$$

これを図示すると



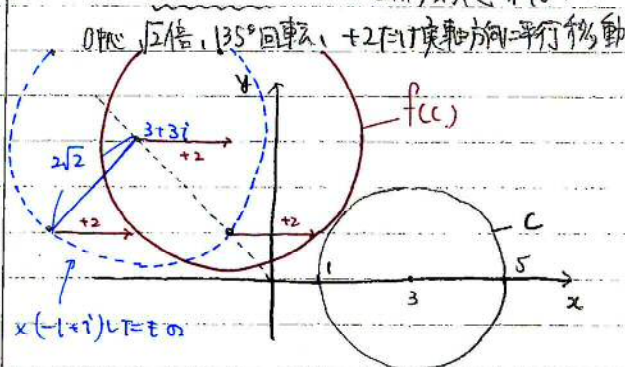
* $|z|=1$ のときの $w = f(z)$ の軌跡は?

$$z = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{とパラメータ表示}$$

(2) $C: |z-3|=2$ (中心3, 半径2の円)

$w = f(z) = (-1+i)z + 2$ とし
 像 $f(C)$ を求める。
上の点から見てfから見たとき
 1. 逆像の図形のこと。

$\Rightarrow (-1+i)z + 2$ の図形的意味は?



中心 $-1+3i$
 半径 $2\sqrt{2}$ の円

4-5)

$w = f(z) = \frac{1}{z-1}$ としたとき

(1) $C: |z|=1$ ($z \neq i$) に対して $f(C)$ は?

(2) $D: |z+i|=1$ に対して $f(D)$ は?

逆像法の発想!! 上の範囲で考える!

例 (1) ならば

$$|z|=1 \text{ 上の点 } \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \xrightarrow{f} \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1} = f(i)$$

という決まりで逆像を考えると

$w = 3+2i$ は $f(C)$ 上の点??

このときの z の値は

$$3+2i = \frac{1}{z-1} \\ \therefore z-1 = \frac{1}{3+2i} = \frac{3-2i}{13}$$

$$\therefore z = \frac{3+11i}{13}$$

おかしな値になった。具体例で考えてみる。

これは $|z|=1$ 上にはないので

$\therefore w = 3+2i$ は $f(C)$ 上にはない。

$\Rightarrow$ この考えを一般化!!

w が $f(C)$ 上の点かどうか判断するには

$$w = \frac{1}{z-1} \text{ から逆算して } z = \frac{1}{w} + 1 \text{ とし}$$

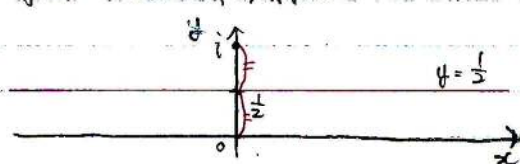
得られる z が $|z|=1$ 上にあるか確認。

よって $z = \frac{1}{w} + 1$ を $|z|=1$ に代入して

$$\left| \frac{1}{w} + 1 \right| = 1 \Leftrightarrow |1+w| = |w| \quad (w \neq 0 \text{ は } \times)$$

$$\Leftrightarrow |w-1| = |w|$$

だから像 $f(C)$ は $0, 1$ を両端とする
 線分の垂直二等分線。



P.S. (2) $|w - \frac{1}{2}i| = \frac{1}{3}$

5日目

(ii) Iは平面ABC上にあるから

$$\vec{AI} = x\vec{AB} + y\vec{AC} \quad \text{とわかる。}$$

① I=1代入

$$(x\vec{AB} + y\vec{AC}) \cdot \vec{AB} = 3$$

$$\therefore |\vec{AB}|^2 \cdot x + (\vec{AB} \cdot \vec{AC}) \cdot y = 3$$

$$\therefore 6x + 2y = 3 \quad \text{③}$$

② I=1代入

$$(x\vec{AB} + y\vec{AC}) \cdot \vec{AC} = 5$$

$$\therefore (\vec{AB} \cdot \vec{AC})x + |\vec{AC}|^2 y = 5$$

$$\therefore 2x + 10y = 5 \quad \text{④}$$

③・④ 連立して

$$x = \frac{5}{14}, \quad y = \frac{3}{7}$$

(iii) (ii)の結果より

$$\vec{AI} = \frac{5}{14}\vec{AB} + \frac{3}{7}\vec{AC}$$

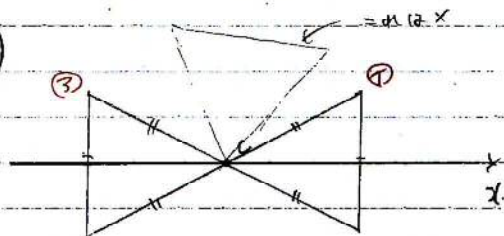
$$\therefore \vec{OI} = \vec{OA} + \vec{AI}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{5}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{9}{14} \\ \frac{12}{7} \\ \frac{29}{14} \end{pmatrix}$$

$$I\left(\frac{9}{14}, \frac{12}{7}, \frac{29}{14}\right)$$

5-3)



(>0よりCは実数。

又、実数係数の2次方程式 $f(x)$ に対し、
方程式 $f(x)=0$ が虚数解 α をも
たらば、その共役 $\bar{\alpha}$ も解

(→ cf 課5-1 iii)

たのて

$$x^2 + ax + b = 0 \quad (a, b: \text{実数}) \quad \text{①}$$

は $x=C, \alpha, \bar{\alpha}$ を解に持つ、1次式の
図のようには位置関係にある。

解と係数の関係より

(①) の2次の係数に注目すると、

$$C + \alpha + \bar{\alpha} = 0$$

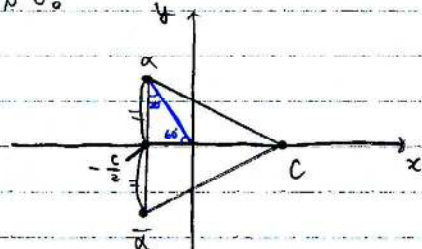
$$\therefore \frac{C + \alpha + \bar{\alpha}}{3} = 0 \rightarrow \text{原点重心}$$

$$\therefore \alpha + \bar{\alpha} = -C$$

$$\frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2} = -\frac{C}{2}$$

$$\therefore \operatorname{Re}(\alpha) = -\frac{C}{2} < 0$$

よって ① は左半平面以下の部分で、
わかる。



図より

$$\alpha = -\frac{C}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}Ci$$

$$(\bar{\alpha} = -\frac{C}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}Ci)$$

とわかる。

a, b の値は (①) に再び解と係数の関係を

用い

$$a = C\alpha + C\bar{\alpha} + \alpha \cdot \bar{\alpha} = 0$$

$$b = -C\alpha \cdot \bar{\alpha} = -C^3$$

$$x^a + y^a = 1 \quad \text{の曲線の様子 ②}$$

5-4)

(1) $C: \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ は放物線の一部

あることを示す。

~ 1 についてわかる ~

• $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 内の曲線

(1,0), (0,1) を通る

• ① は x と y を入れかえても同じ式→ $y = x$ に沿って対称→ 45° 回転すれば見慣れた形になる

(とあるが、同値性無視して「とある」)

① 両辺2乗して

$$x + 2\sqrt{xy} + y = 1$$

$$\therefore 2\sqrt{xy} = 1 - x - y \quad (\geq 0 \text{ より } x+y \leq 1) \quad \text{--- 2乗して}$$

さらに2乗して

$$4xy = 1 + x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2xy$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$$

曲線 C' とおき (C' は放物線に一致する
= x と y を入れかえて OK)

(C は C' の一部) , ところで C' は 45° 回転した曲線 D に考えてみる(x, y) が D 上 $\Leftrightarrow$ (x, y) を -45° 回転した点が

C 上

に注意すると (x, y) を -45° 回転した点は

複素数平面上で考えると

$$(x + yi) \times (\cos(-45^\circ) + i \sin(-45^\circ))$$

$$= (x + yi) \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)i$$

つまり $\left(\frac{\sqrt{2}x + \sqrt{2}y}{2}, \frac{-\sqrt{2}x + \sqrt{2}y}{2}\right)$ と表せるこれを C' の式に代入して

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$$

$$= x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}x + \sqrt{2}y}{2} \cdot \frac{-\sqrt{2}x + \sqrt{2}y}{2} = y^2 - x^2$$

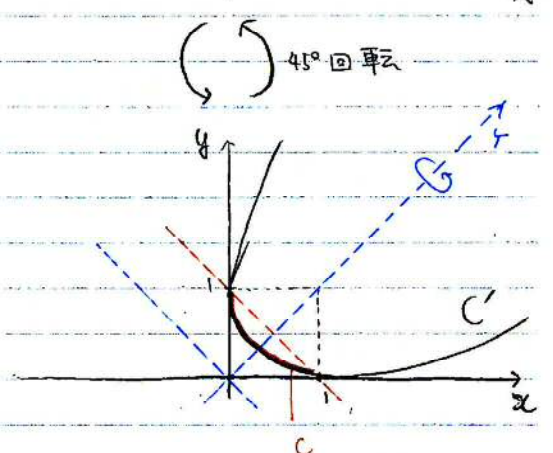
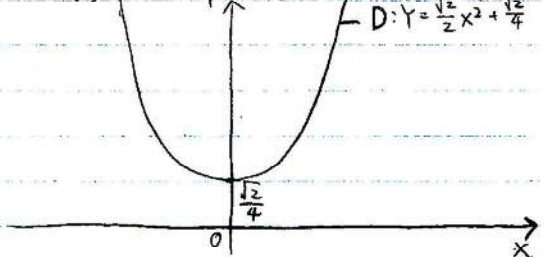
$$= -2(x + y) = -2\sqrt{2}Y$$

$$\therefore x^2 + y^2 - (y^2 - x^2) - 2\sqrt{2}Y + 1 = 0$$

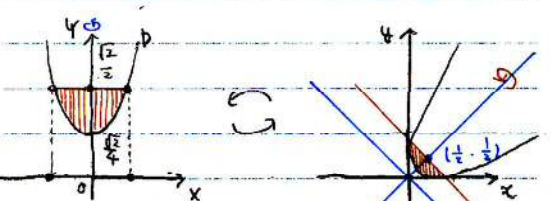
$$\therefore Y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

たのて D は放物線、よって C も放物線
とわかる

= 45°



(2)



$$D: Y = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

求める立体の体積 V は

$$Y = \frac{\sqrt{2}}{2}, Y = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ で囲まれる}$$

領域を Y 軸まわりには回転して作られると同じ!

$$V = \int_{Y=\frac{\sqrt{2}}{4}}^{Y=\frac{\sqrt{2}}{2}} \pi x^2 dY$$

$$= \int_{Y=\frac{\sqrt{2}}{4}}^{Y=\frac{\sqrt{2}}{2}} \pi \left(\sqrt{2}Y - \frac{1}{2}\right) dY$$

$$= \left[\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2}Y^2 - \frac{1}{2}Y\right)\right]_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{12}{16}\pi$$

4-5)

(2) $W = |z+i| = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{W} + i$ を代入

$\Rightarrow | \frac{1}{W} + 2i | = 1 \quad \times |W|$

$\Rightarrow |2iW + 1| = |W| \quad \times |1-i| = 1$

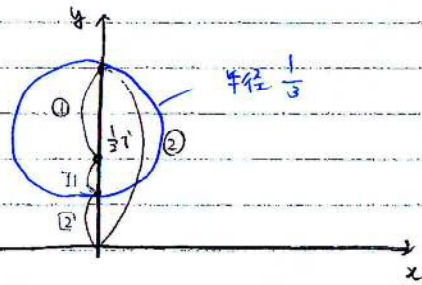
$\Rightarrow |2W - 1| = |W|$

$\Rightarrow 2|W - \frac{1}{2}| = |W| \quad \boxed{t=1 \text{ とき } W=0}$

アポロニウスの円も使える

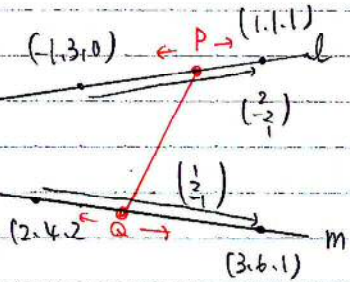
ア...

$\Rightarrow |W - \frac{3}{2}| = \frac{1}{3}$



5 総合問題

5-1)



l上の点Pは

$\vec{OP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

m上の点Qは

$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{PQ}$ は

$\vec{OQ} - \vec{OP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(= 5\vec{a} - t\vec{b} + \vec{c})$

$|\vec{PQ}|^2 = s^2|\vec{a}|^2 + t^2|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2st\vec{a} \cdot \vec{b} - 2t\vec{b} \cdot \vec{c} + 2s\vec{c} \cdot \vec{a}$

$= 6s^2 + 9t^2 + 14 + 6st - 12t + 6s$

s, t が全実数を動くときの最小値を

求めよ。

(sについて整理して)

$= 6s^2 + 6(t+1)s + 9t^2 - 12t + 14$

$= 6\{s^2 + (t+1)s\} + 9t^2 - 12t + 14$

$= 6\{s + \frac{t+1}{2}\}^2 - \frac{3}{2}(t^2 + 2t + 1) + 9t^2 - 12t + 14$

$= 6(s + \frac{t+1}{2})^2 - \frac{3}{2}(t^2 + 2t + 1) + 9t^2 - 12t + 14$

$= 6(s + \frac{t+1}{2})^2 + \frac{15}{2}(t-1)^2 + 5$

s について

$s + \frac{t+1}{2} = 0 \Rightarrow t = -1$

つまり

$s = -1, t = 1$

のとき $|\vec{PQ}|^2$ は最小値 5 をとる。

$\therefore (\vec{PQ} \text{ の min }) = \sqrt{5}$

⑤

s = -1, t = 1 のとき

$\vec{PQ} = (-1)\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

∴ $\vec{PQ} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0, \vec{PQ} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

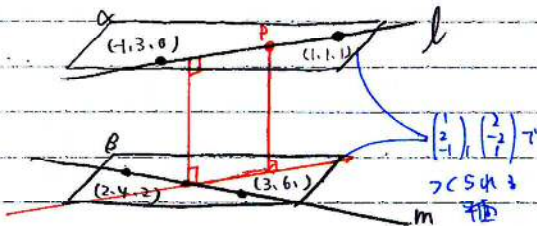
∴ l と m は垂直

また l と m は

と交わる

∴ $\vec{PQ} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0, \vec{PQ} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ のとき

∴ l と m は交わる



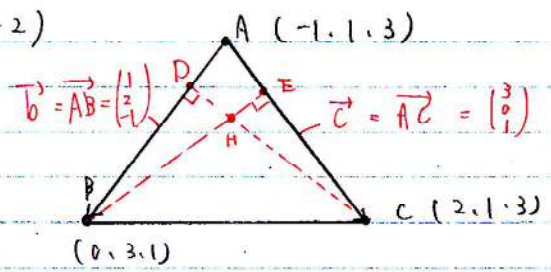
図のようには 2 直線を含む平行な平面 alpha, beta を

考え、P から平面 beta までの距離

垂線の足が m 上にあるとき min。

(つまり $\vec{PQ} \perp \beta$
 $\therefore \vec{PQ} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{PQ} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$)

5-2)



(1) $\vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$

(2) (i) (ii)

$\vec{AB} = \vec{b}$ とおき、 $\vec{CB} \cdot \vec{b} = 0$ とする
求める。
 $\vec{AE} = \vec{c}$ とおき、 $\vec{BE} \cdot \vec{c} = 0$ とする
求める。

∴ 正射影を利用して求めることもできる。

$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| \times |\vec{c}| \times (\vec{b} \text{ の } \vec{c} \text{ 方向の符号付き長さ})$

$= |\vec{b}| \times |\vec{AB}|$

$\therefore 2 = \sqrt{6} \times |\vec{AB}|$

$\therefore |\vec{AB}| = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore AB : AD = \sqrt{6} : \frac{\sqrt{6}}{3} = 3 : 1$

∴ $\vec{AD} = \frac{1}{3} \vec{b}$

又

$\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{b}$

$= |\vec{c}| \times (\vec{b} \text{ の } \vec{c} \text{ 方向の符号付き長さ})$

$= |\vec{c}| \times |\vec{AE}|$

$\therefore 2 = \sqrt{10} \times |\vec{AE}|$

$\therefore |\vec{AE}| = \frac{\sqrt{10}}{5}$

$\therefore AC : AE = \sqrt{10} : \frac{\sqrt{10}}{5} = 5 : 1$

∴ $\vec{AE} = \frac{1}{5} \vec{c}$

(iii)

H は CD と BE の交点

CD 上: $\vec{AH} = s \vec{AD} + (1-s) \vec{AC}$

BE 上: $\vec{AH} = t \vec{AB} + (1-t) \vec{AE}$

これら係数比較でも可。

テオウスの定理も使って OK。

計算して

$\vec{AH} = \frac{2}{7} \vec{b} + \frac{1}{7} \vec{c}$

$= \frac{2}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

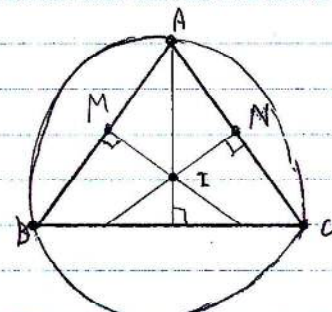
∴ $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{AH}$ のとき

$\vec{OH} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2/7 \\ 11/7 \\ 13/7 \end{pmatrix}$

$\therefore H(-\frac{2}{7}, \frac{11}{7}, \frac{13}{7})$

(3)



外心は 3 直線の垂直二等分線の交点である。

また、AB, AC の中点 M, N とおき、

(i) 正射影で考える。

$\vec{AI} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{AI} = AB \times AM = 3$

$\vec{AI} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{AI} = AC \times AN = 5$

5-5)

$$(1) \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_{n+1} = \frac{3iz_n - 1}{z_n + i} \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

とあると z_2, z_3 は

$$z_2 = \frac{3iz_1 - 1}{z_1 + i} = \frac{-1 + 3i}{1 + i}$$

$$= \frac{(-1 + 3i)(1 - i)}{2}$$

$$= \frac{1 + 2i}{2}$$

$$z_3 = \frac{3iz_2 - 1}{z_2 + i} = \frac{3i(\frac{1+2i}{2}) - 1}{(\frac{1+2i}{2}) + i}$$

$$= \frac{-7 + 3i}{1 + 3i}$$

$$= \frac{(-7 + 3i)(1 - 3i)}{10}$$

$$= \frac{2 + 24i}{10}$$

$$= \frac{1 + 12i}{5}$$

よって xy 平面上で考えたときの

$$(1, 0) \quad (\leftrightarrow z_1 = 1)$$

$$(1, 2) \quad (\leftrightarrow z_2 = \frac{1+2i}{2})$$

$$(\frac{1}{5}, \frac{12}{5}) \quad (\leftrightarrow z_3 = \frac{1+12i}{5})$$

の3点を通る円の方程式を求めよ。②

円の方程式を

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

とあり、代入すれば、

$$\begin{cases} 1 + a + c = 0 \\ 5 + a + 2b + c = 0 \\ \frac{1}{25} + \frac{144}{25} + \frac{a}{5} + \frac{12b}{5} + c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases}$$

なので

$$x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 2$$

よって C は中心 i 、半径 $\sqrt{2}$ の円

$$x^2 + (y-1)^2 = 2$$

(2) 漸化式は

$$w = f(z) = \frac{3iz - 1}{z + i}$$

とあると、

$$\begin{cases} z_1 = 1 \\ z_{n+1} = f(z_n) \end{cases}$$

よって点 $z_n (n \geq 1)$ は円 C の周上に

あることを示すために

C 上の任意の点 z が $f(z)$ の像も C 上

にあることを示す。 C の f による像 $= f(C)$ とする

(問4-5と同一の要領!!)

$$w = \frac{3iz - 1}{z + i} \Leftrightarrow w(z + i) = 3iz - 1 \quad (z \neq -i)$$

$$\Leftrightarrow (w - 3i)z = -w - 1 \quad (w \neq 3i)$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-w - 1}{w - 3i}$$

よって $C: |z - i| = \sqrt{2}$ に代入して、

$$\therefore \left| \frac{-w - 1}{w - 3i} - i \right| = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-2iW - 4}{W - 3i} \right| = \sqrt{2}$$

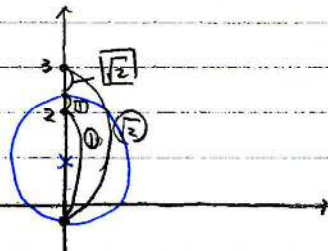
$$\Leftrightarrow |-2iW - 4| = \sqrt{2} |W - 3i|$$

$$(W \neq 3i) \quad |W| = 1$$

$$\Leftrightarrow |2W - 4i| = \sqrt{2} |W - 3i|$$

$$\Leftrightarrow 2 |W - 2i| = \sqrt{2} |W - 3i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} |W - 2i| = |W - 3i|$$



$$\Leftrightarrow |w - i| = \sqrt{2}$$

すなわち $f(C)$ は C と一致する。

つまり C 上の任意の点 z が $f(z)$ の像である。

よって C 上にはある z が $f(z) = z$ となる。

③ 帰納法で示す。

$$|z_k - i| = \sqrt{2}$$

のとき、

$$|z_{k+1} - i| = \sqrt{2}$$

を示せばよい。

$$z_{k+1} = \frac{3iz_k - 1}{z_k + i} \quad \text{を①に代入して}$$

$$|z_{k+1} - i| = \left| \frac{3iz_k - 1}{z_k + i} - i \right| = \dots$$

$$= \frac{|2i|^2 |z_k|^2}{|z_k + i|^2}$$

$$= \frac{4 \cdot z_k \cdot \overline{z_k}}{(z_k + i)(\overline{z_k} + i)}$$

①と②を代入して

$$z_k \cdot \overline{z_k} + i z_k - i \overline{z_k} = 1$$

と計算すると、

$$z_k \cdot \overline{z_k} = -i z_k + i \overline{z_k} + 1$$

として代入計算して、

$$= \frac{4(-i z_k + i \overline{z_k} + 1)}{2(-i z_k + i \overline{z_k} + 1)}$$

$$= 2$$

と示される。