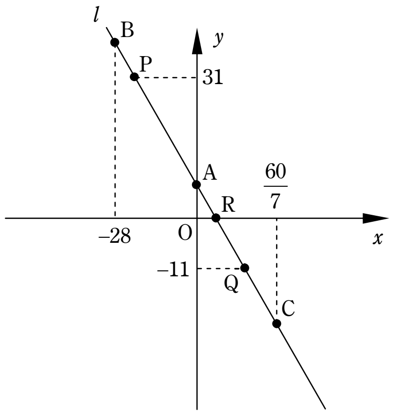
中1数学B 2019年度1学期 座標平面と1次関数 本問解答
§9 グラフの交点

※ 欠席してしまった場合は、問 9.2, 問 9.3, 問 9.5 を自分で確認し、p.24,25 の宿題 H9.2〜H9.5 に取り組んで提出してください。余裕があれば全問解きましょう。

問9.1

$$y=-\frac{7}{4}x+3 \cdots\cdots ①$$

のグラフが下図の直線 l です。



(1) A は l 上で x 座標が 0 となる点なので、y 座標は

$$y=-\frac{7}{4}\times 0+3=3$$

で、A の座標は A $\boxed{(0,3)}$ です。

（この y 座標は、l の y 切片として、関数の式とグラフの対応を学ぶ時に注目していた量でしたね。）

B は l 上の点で、x 座標が -28 なので、y 座標は、①に $x=-28$ を代入して、

$$y=-\frac{7}{4}\times(-28)+3=52$$

です。よって、B $\boxed{(-28,52)}$

C は l 上の点で、x 座標が $\frac{60}{7}$ なので、y 座標は、①に $x=\frac{60}{7}$ を代入して、

$$y=-\frac{7}{4}\times\frac{60}{7}+3=-12$$

です。よって、C $\boxed{\left(\frac{60}{7},-12\right)}$

(2) P は l 上の点で、y 座標が 31 なので、x 座標は、①に $y=31$ を代入して、

$$31=-\frac{7}{4}x+3$$

$$\frac{7}{4}x=3-31=-28$$

$$x=-28\times\frac{4}{7}=-16$$

です。よって、P $\boxed{(-16,31)}$

Q は l 上の点で、y 座標が -11 なので、x 座標は、①に $y=-11$ を代入して、

$$-11=-\frac{7}{4}x+3$$

$$\frac{7}{4}x=3+11=14$$

$$x=14\times\frac{4}{7}=8$$

です。よって、Q $\boxed{(8,-11)}$

R は l 上の点で、y 座標が 0 なので、x 座標は、①に $y=0$ を代入して、この点の x 座標は

$$0=-\frac{7}{4}x+3$$

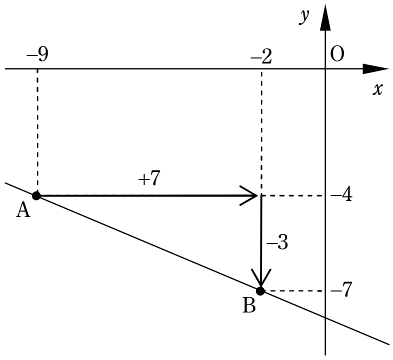
$$\frac{7}{4}x=3$$

$$x=3\times\frac{4}{7}=\frac{12}{7}$$

です。よって、R $\boxed{\left(\frac{12}{7},0\right)}$

問9.2

(1)



(i) 直線 AB の傾きは

$$\frac{-7-(-4)}{-2-(-9)}=\frac{-3}{7}=\boxed{-\frac{3}{7}}$$

です。

(ii) 直線 AB は傾き $-\frac{3}{7}$ なので、y 切片を b とおくと、1 次関数

$$y=-\frac{3}{7}x+b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフになっています。
このグラフが A(−9, −4) を通るので、関数①において、$x=-9$ のとき $y=-4$ となります。よって、

$$-4=-\frac{3}{7}\times(-9)+b$$

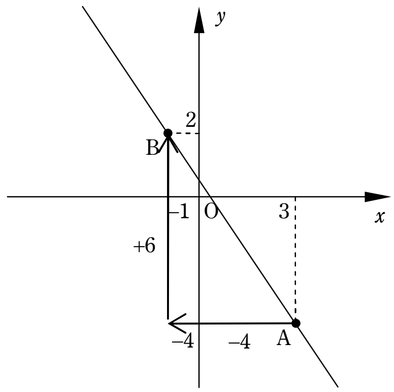
$$\therefore b=-4-\frac{27}{7}=-\frac{55}{7}$$

と分かります。
よって、直線 AB は

$$\boxed{y=-\frac{3}{7}x-\frac{55}{7}}$$

のグラフです。

(2)



直線 AB は、その傾きが

$$\frac{2-(-4)}{-1-3}=\frac{6}{-4}=-\frac{3}{2}$$

なので、y 切片を b とおくと、
1 次関数

$$y=-\frac{3}{2}x+b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフになっています。
このグラフが A(3, −4) を通るので、関数①において、$x=3$ のとき $y=-4$ となります。よって、

$$-4=-\frac{3}{2}\times 3+b \qquad \therefore b=-4+\frac{9}{2}=\frac{1}{2}$$

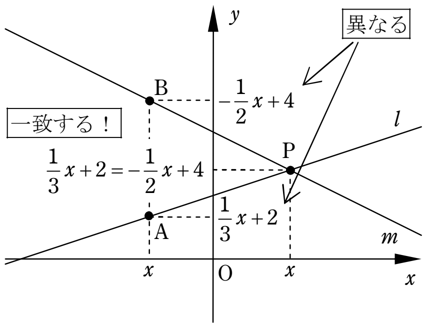
と分かります。
よって、直線 AB は

$$\boxed{y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}$$

のグラフです。

問9.3

$y=\dfrac{1}{3}x+2\cdots$①　$y=-\dfrac{1}{2}x+4\cdots$②



l と m の交点 P においては、x 座標から y 座標を計算する際、①式で計算することもできますし、②式で計算することもできます。つまり、交点 P の x 座標は、

$\dfrac{1}{3}x+2=-\dfrac{1}{2}x+4$ の解 x に他なりません。

これを解くと、

$$\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x=4-2$$

$$\frac{2+3}{6}x=2$$

$$x=2\times\frac{6}{5}=\frac{12}{5}$$

となります。これを①に代入して、

P の y 座標は

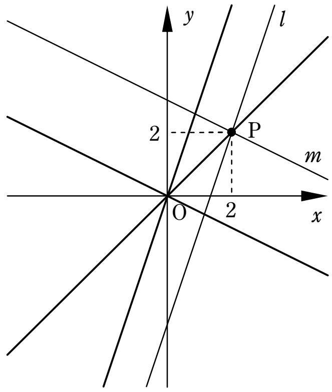
$$y=\frac{1}{3}\times\frac{12}{5}+2=\frac{4}{5}+2=\frac{14}{5}$$

となります。よって、交点 P の座標は

$$\boxed{\left(\frac{12}{5},\frac{14}{5}\right)}$$

と分かります。

問9.4



l,m と、原点を通り傾き a の直線である n で囲まれる三角形が存在しないのは、

(i)　n が l と平行
(ii)　n が m と平行
(iii)　n が l,m の交点 P を通る

のいずれかの場合です。

それぞれの場合の傾き a の値を求めると、

(i)　n の傾き a は、平行な直線 l の傾き 3 と等しく、$a=3$ です。

(ii)　n の傾き a は、平行な直線 m の傾き $-\dfrac{1}{2}$ と等しく、$a=-\dfrac{1}{2}$ です。

(iii)　l,m の交点 P の座標は、x 座標が

$$3x-4=-\frac{1}{2}x+3$$

$$\frac{7}{2}x=7\quad\therefore x=7\times\frac{2}{7}=2$$

で、y 座標は

$$y=3\times2-4=2$$

なので、$P(2,2)$ です。n が P を通るときの傾き a は、OP の傾きなので、

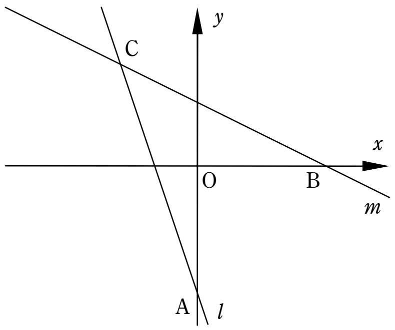
$$a=\frac{2-0}{2-0}=1$$

となります。

以上より、$\boxed{a=3,-\dfrac{1}{2},1}$ です。

問9.5

$y = -3x - 9$ …①　　$y = -\dfrac{1}{2}x + 6$ …②



(1)　l の y 切片は -9 なので、$\boxed{\mathrm{A}(0, -9)}$

B は m 上で y 座標が 0 となる点なので、x 座標は

$$0 = -\frac{1}{2}x + 6 \qquad \frac{1}{2}x = 6$$

$\therefore x = 6 \times 2 = 12$

よって、B の座標は $\boxed{\mathrm{B}(12, 0)}$ です。

C は l と m の交点なので、x 座標は

$$-3x - 9 = -\frac{1}{2}x + 6$$

$$-3x + \frac{1}{2}x = 6 + 9 \qquad -\frac{5}{2}x = 15$$

$\therefore x = 15 \times \left(-\dfrac{2}{5}\right) = -6$

交点が $y = -3x - 9$ のグラフ上の点であることから y 座標を計算すると、

$y = -3 \times (-6) - 9 = 9$

なので、C の座標は $\boxed{\mathrm{C}(-6, 9)}$ です。

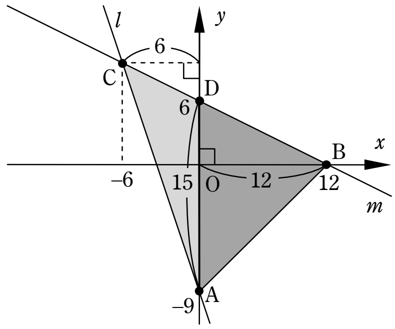
(2)　m と y 軸の交点を D とすると、m の y 切片は 6 なので D$(0, 6)$ です。

△ABC を AD で分割して、△ABD と△ACD の面積を、AD を底辺として計算していきましょう。

△ABD の面積は、AD を底辺としたときの高さが 12 なので（下図）、

$$\triangle\mathrm{ABD} = \frac{1}{2} \times \mathrm{AD} \times 12 = 6 \times \mathrm{AD}$$

△ACD の面積は、AD を底辺としたときの高さが 6 なので（下図）、



$$\triangle\mathrm{ABD} = \frac{1}{2} \times \mathrm{AD} \times 6 = 3 \times \mathrm{AD}$$

したがって、△ABC は

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \triangle\mathrm{ABD} + \triangle\mathrm{ACD} \\ &= 6 \times \mathrm{AD} + 3 \times \mathrm{AD} = 9 \times \mathrm{AD}\end{aligned}$$

と表せます。

ここで、AD の長さは

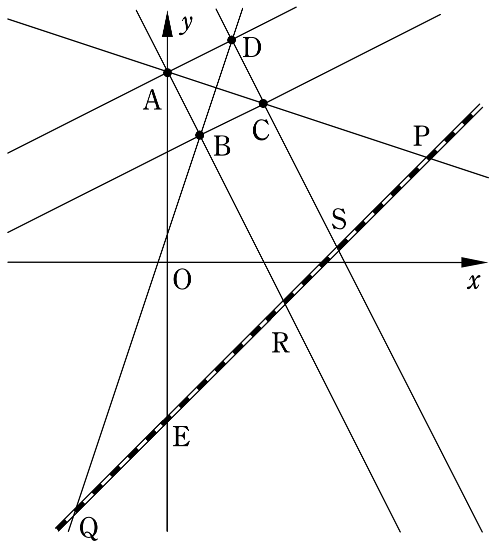
$\mathrm{AD} = 6 - (-9) = 15$

なので、

$$\triangle\mathrm{ABC} = 9 \times 15 = \boxed{135}$$

です。

問9.6



(1) Pは線路と直線ACの交点です。

A(0,7)とC(3,6)を通る直線の傾きは

$$\frac{6-7}{3-0}=\frac{-1}{3}=-\frac{1}{3}$$

で、y切片は7なので、直線ACは

$$y=-\frac{1}{3}x+7$$

のグラフです。

$y=x-5$のグラフである線路と直線ACの交点Pの座標は、x座標が

$$x-5=-\frac{1}{3}x+7 \qquad x+\frac{1}{3}x=7+5$$

$$\frac{4}{3}x=12 \quad \therefore x=12\times\frac{3}{4}=9$$

で、y座標は

$$y=9-5=4$$

なので、P$\boxed{(9,4)}$です。

(2) Qは線路と直線BDの交点です。

B(1,5)とD(2,8)を通る直線の傾きは

$$\frac{8-5}{2-1}=\frac{3}{1}=3$$

なので、y切片をbとおくと、

直線BDは

$y=3x+b$ ……………………… ①

のグラフとなっています。

直線BDは点B(1,5)を通るので、

①において、$x=1$のとき$y=5$

となります。よって、

$$5=3\times1+b \quad \therefore b=5-3=2$$

で、直線BDは

$$y=3x+2$$

のグラフです。

線路と直線BDの交点Qの座標は、

x座標が

$$x-5=3x+2 \qquad x-3x=2+5$$

$$-2x=7 \quad \therefore x=7\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{2}$$

で、y座標は

$$y=-\frac{7}{2}-5=-\frac{17}{2}$$

なので、Q$\boxed{\left(-\frac{7}{2},-\frac{17}{2}\right)}$です。

(3) ABの傾きが負なので、傾きが1の直線である線路とは平行ではなく、交点があることが分かります。この交点をRとすると、Rからは、煙突AとBが重なって見えます。

DCはABと平行なので、やはり線路と交点をもちます。これをSとすれば、Sからは、煙突DとCが重なって見えます。

A(0,7), D(2,8)より、ADの傾きは

$$\frac{8-7}{2-0}=\frac{1}{2}$$

なので、傾き1の直線である線路とは

平行ではなく、交点があります。この交点を T とすれば、T からは A と D が重なって見えます。
BC は AD と平行なので、やはり線路と交点をもちます。これを U とすれば、U からは煙突 B と C が重なって見えます。
A, B, C, D のうちどの 2 本が重なるかは 6 通りあり、そのすべてが起こりうることが分かったので、煙突が 3 本しか見えない位置は全部で $\boxed{6\text{個}}$ です。

(4) 煙突が見える順番が変化するのは、ちょうど 2 本の煙突が重なって見える地点を通過したときです。
線路上の、2 本の煙突が重なって見える場所は、x 座標の小さい方から順に、Q, R, S, P, U, T となっており、この 6 地点が煙突の見える順番が入れ替わる場所になっています。

いま、線路と y 軸の交点を E とすると、E からは左から A, B, D, C の順に煙突が見えています。よって、Q と R の間の区間では、この順に見えていることが分かります。
Q においては B と D が重なって見えていて、Q より x 座標の小さい部分では、E から見たときとは B と D の見える順番が逆になり、D の方が B よりも左に見えています。よって、この範囲には A, B, D, C の順番に見える部分はありません。
R においては A と B が重なって見えていて、R より x 座標の大きい部分では、E から見たときとは A と B の見える順番が逆になり、B の方が A よりも左に見えています。よって、この範囲にも A, B, D, C の順番に見える部分はありません。よって、A, B, D, C の順に見える部分は、Q から R までの部分に限られます。

$A(0,7)$, $B(1,5)$ を通る直線の傾きは

$$\frac{5-7}{1-0}=\frac{-2}{1}=-2$$

で、y 切片は 7 なので、直線 AB は

$$y=-2x+7$$

のグラフです。
線路と直線 AB の交点 R の x 座標は、

$$x-5=-2x+7 \qquad x+2x=7+5$$

$$3x=12 \qquad \therefore x=12\times\frac{1}{3}=4$$

です。
よって、求める x 座標の範囲は

$$\boxed{-\frac{7}{2}<x<4}$$

となります。