

中1数学A 平行線と比 テキスト本問解答

§6 平行四辺形の n 等分

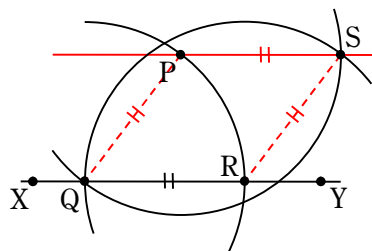
※ 欠席してしまった場合は、問6.2を自分で確認し、p36の宿題に取り組んで提出してください。余裕があれば全問解きましょう。

問6.1

(1)

[作図方法]

XY上に勝手な点Qを取る。コンパスでQを中心とし、Pを通る円(弧)を描き、XYとの交点の一つをRとする。さらに、Pを中心とし、Qを通る円(弧)と、Rを中心とし、Qを通る円(弧)を描き、それらの交点のうち、Qでない方をSとする。最後にSとPを通る直線を定木で引けば、SPはXYに平行な直線である。



[証明]

P, Q, R, Sの取り方から、 $PQ = QR = RS = SP$ なので、PQRSはひし形。

よって、 $SP \parallel XY$ である。

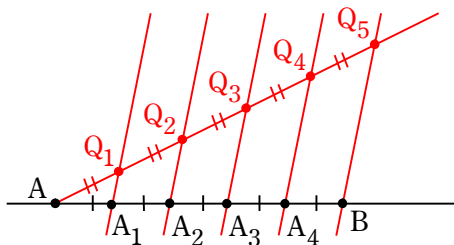
(q.e.d.)

(1)より、平行線の作図は可能であるので、(2)では平行線の作図過程は省略する。

(2)

[作図方法]

Aを通り、ABとは異なる半直線を引き、コンパスを用いてこの直線上、Aから等間隔に n 個の点 $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ を取る。直線 BQ_n を引き、(1)の手順で $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}$ を通り BQ_n に平行な直線を引き、ABとの交点を順に $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ とすると、 $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ は線分ABの n 等分点になる。

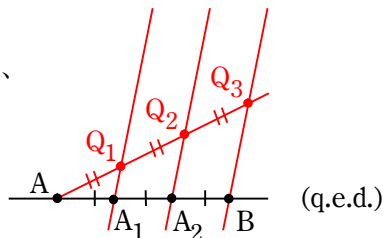


[証明]

$n=3$ のとき、

$AQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3$ かつ $A_1Q_1 \parallel A_2Q_2 \parallel BQ_3$ なので、

平行線と比の定理より $AA_1 = A_1A_2 = A_2B$ である。



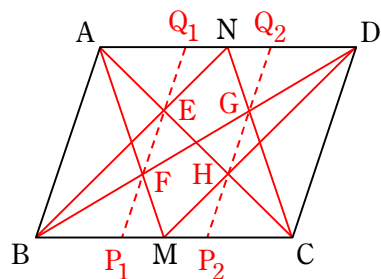
(q.e.d.)

問6.2

(方針1)

[作図方法]

AC と BN の交点を E、BD と AM の交点を F、
BD と CN の交点を G、AC と DM の交点を H とし、
EF と BC, AD の交点をそれぞれ P_1, Q_1 とし、
GH と BC, AD の交点を P_2, Q_2 とする。
すると、 P_1, P_2 が BC の 3 等分点、
 Q_1, Q_2 が AD の 3 等分点になる。

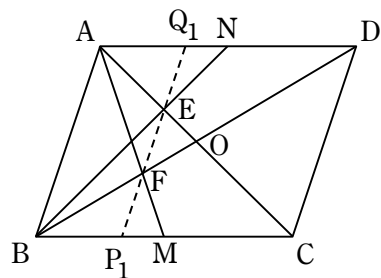


[仮定]

- ABCD は平行四辺形 ①
BM = MC ②
AN = ND ③

[結論]

P_1, P_2 は BC の 3 等分点、 Q_1, Q_2 は AD の 3 等分点



[証明]

どの点についても同様なので、 Q_1 が AD の 3 等分点であることを証明する。

①より $AN \parallel BC$ なので、

$$AE : EC = AN : BC \quad (\text{平行線と比の定理}) \quad \dots ④$$

①③より $BC = AD = 2AN$ なので、④に代入して

$$AE : EC = AN : 2AN = 1 : 2 (= 2 : 4) \quad \dots ⑤$$

また、AC と BD の交点を O とすると、

$$\text{①より} \quad AO : OC = 1 : 1 (= 3 : 3) \quad \dots ⑥$$

$$\text{⑤⑥より} \quad EO : OC = 1 : 3 \quad \dots ⑦$$

$$\text{同様に} \quad FO : OD = 1 : 3 \quad \dots ⑧$$

$$\text{⑦⑧より} \quad EO : OC = FO : OD \quad \dots ⑨$$

⑨より $EF \parallel CD$ (平行線と比の定理の逆)

$$\therefore EQ_1 \parallel CD \quad \dots ⑩$$

よって $AQ_1 : Q_1D = AE : EC$ (⑩より、平行線と比の定理)

$$= 1 : 2 \quad (\text{⑤より})$$

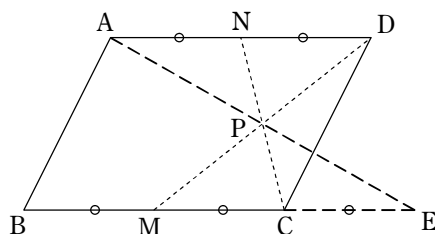
であり、 Q_1 は AD の 3 等分点である。

(q.e.d.)

(方針2)

[作図方法]

CN と DM の交点を P、
 AP と BC の交点を E、
 AE と BD の交点を X、
 CX, MX と AD の交点をそれぞれ X_1, X_2
 とする。
 すると、 X_1, X_2 が AD の 3 等分点になる。
 同様に、BC の 3 等分点も作図できる。

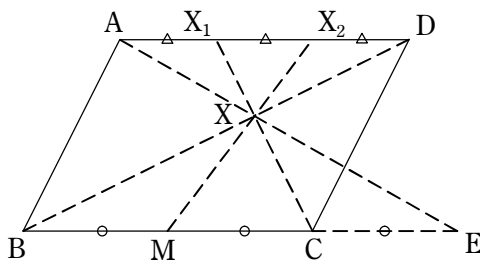


[仮定]

ABCD は平行四辺形 ①
 BM = MC ②
 AN = ND ③

[結論]

X_1, X_2 は AD の 3 等分点



[証明]

①より $AD \parallel ME$ なので、平行線と比の定理より、
 $AN : CE = NP : PC = ND : MC$ ④
 ③④より、 $CE = MC$ なので、②と合わせて、
 $BM = MC = CE$ ⑤
 ①より $AD \parallel BE$ なので、平行線と比の定理より、
 $AX_1 : CE = X_1X : XC = X_1X_2 : MC$ ⑥
 $X_1X_2 : MC = X_2X : XM = X_2D : BM$ ⑦
 ⑥⑦より、 $AX_1 : CE = X_1X_2 : MC = X_2D : BM$ ⑧
 ⑤⑧より、 $AX_1 = X_1X_2 = X_2D$
 すなわち、 X_1, X_2 は AD の 3 等分点である。 (q.e.d.)

問6.3

[作図方法]

CA_2 と DB_2 の交点を P 、

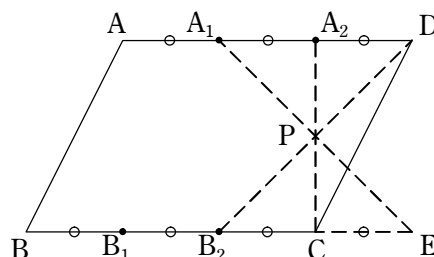
A_1P と BC の交点を E 、

AE と BD の交点を X 、

CX, B_2X, B_1X と AD の交点をそれぞれ X_1, X_2, X_3 とする。

すると、 X_1, X_2, X_3 が AD の 4 等分点になる。

同様に、 BC の 4 等分点も作図できる。



[仮定]

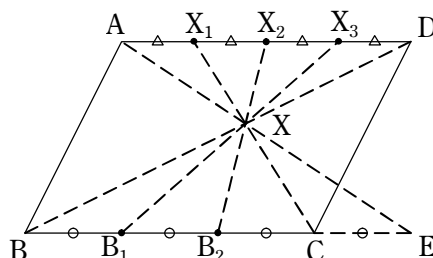
$ABCD$ は平行四辺形 ①

$BB_1 = B_1B_2 = B_2C$ ②

$AA_1 = A_1A_2 = A_2D$ ③

[結論]

X_1, X_2, X_3 は AD の 4 等分点



[証明]

①より $A_1D \parallel B_2E$ なので、平行線と比の定理より、

$$A_1A_2 : CE = A_2P : PC = A_2D : B_2C \quad \text{..... ④}$$

③④より、 $CE = B_2C$ なので、②と合わせて、

$$BB_1 = B_1B_2 = B_2C = CE \quad \text{..... ⑤}$$

①より $AD \parallel BE$ なので、平行線と比の定理より、

$$AX_1 : CE = X_1X : XC = X_1X_2 : B_2C \quad \text{..... ⑥}$$

$$X_1X_2 : B_2C = X_2X : XB_2 = X_2X_3 : B_1B_2 \quad \text{..... ⑦}$$

$$X_2X_3 : B_1B_2 = X_3X : XB_1 = X_3D : BB_1 \quad \text{..... ⑧}$$

⑥⑦⑧より、 $AX_1 : CE = X_1X_2 : B_2C = X_2X_3 : B_1B_2 = X_3D : BB_1$ ⑨

⑤⑨より、 $AX_1 = X_1X_2 = X_2X_3 = X_3D$

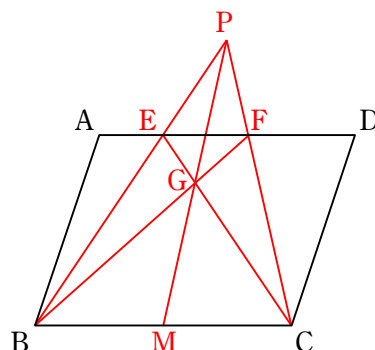
すなわち、 X_1, X_2, X_3 は AD の 4 等分点である。

(q.e.d.)

問6.4

(1) [作図方法]

AD に関して BC と反対側に点 P を、BP, CP が辺 AD と交わるように取り、BP, CP と AD の交点をそれぞれ E, F とする。BF と CE の交点を G とし、PG と BC の交点を M とすると、M は BC の中点である。



[仮定]

ABCD は平行四辺形①

[結論]

BM = MC

[証明]

B を通り EC と平行な直線と PG の交点を H とする。

すなわち、BH // EC②

②より PG : GH = PE : EB
(平行線と比の定理)③

①より EF // BC なので、
PE : EB = PF : FC
(平行線と比の定理)④

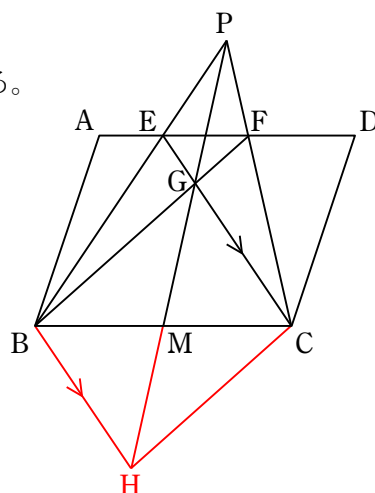
③④より PG : GH = PF : FC⑤

⑤より GF // HC
(平行線と比の定理の逆)⑥

②⑥より BHCG は平行四辺形⑦

平行四辺形の対角線は中点で交わるので、

⑦より BM = MC (q.e.d.)



(2) [作図方法]

(1)で辺 BC の 2 等分までは作図方法が分かっているので、同様に辺 AD も 2 等分し、辺 BC と辺 AD の中点を結ぶことで、平行四辺形を 2 個の合同な平行四辺形に分割することができる。

すると、問 6.2 のようにして、辺 AD と辺 BC の 3 等分点を作図できるので、その 3 等分点を結ぶことで、平行四辺形を 3 個の合同な平行四辺形に分割できる。

さらに、問 6.3 のようにして、辺 AD と辺 BC の 4 等分点を作図できるので、その 4 等分点を結ぶことで、平行四辺形を 4 個の合同な平行四辺形に分割できる。

この先も、5 個、6 個、……と合同な平行四辺形への分割が続けていけることは、平行四辺形 ABCD を k 個の合同な平行四辺形に分割できている、すなわち、辺 AD と辺 BC の k 等分ができているときに、辺 BC の $k+1$ 等分を作図することができればよい (同様に辺 AD を $k+1$ 等分することで、平行四辺形を $k+1$ 個の合同な平行

四辺形に分割できる)。

そこで、平行四辺形 ABCD の辺 AD と辺 BC が A, B の方から、 $A, A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, D$,
 $B, B_1, B_2, \dots, B_{k-1}, C$ と k 等分されているとして、

CA_{k-1} と DB_{k-1} の交点を P、

$A_{k-2}P$ と BC の交点を E、

AE と BD の交点を X、

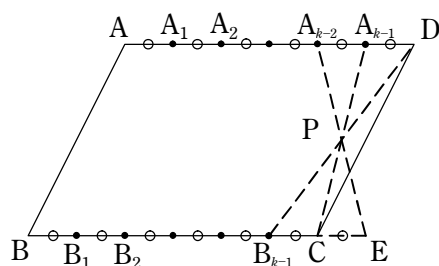
$CX, B_{k-1}X, \dots, B_2X, B_1X$ と AD の交点を

それぞれ $X_1, X_2, \dots, X_{k-1}, X_k$

とする。

すると、 $X_1, X_2, \dots, X_{k-1}, X_k$ が AD の $k+1$ 等分点になる。

同様にして、BC の $k+1$ 等分点も作図できるので、 $k+1$ 等分点同士を結ぶことで
 平行四辺形を $k+1$ 個の合同な平行四辺形に分割できる。



[仮定]

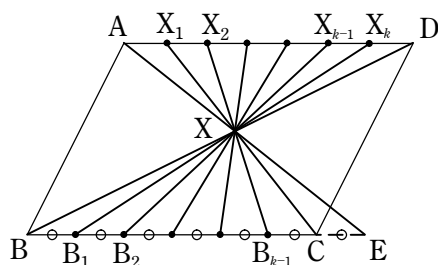
ABCD は平行四辺形 ①

$BB_1 = B_1B_2 = \dots = B_{k-1}C$ ②

$AA_1 = A_1A_2 = \dots = A_{k-1}D$ ③

[結論]

$X_1, X_2, \dots, X_{k-1}, X_k$ は AD の $k+1$ 等分点



[証明]

①より $A_{k-2}D \parallel B_{k-1}E$ なので、平行線と比の定理より、

$$A_{k-2}A_{k-1} : CE = A_{k-1}P : PC = A_{k-1}D : B_{k-1}C \dots\dots ④$$

③④より、 $CE = B_{k-1}C$ なので、②と合わせて、

$$BB_1 = B_1B_2 = \dots = B_{k-1}C = CE \dots\dots ⑤$$

①より $AD \parallel BE$ なので、平行線と比の定理より、

$$AX_1 : CE = X_1X : XC = X_1X_2 : B_{k-1}C \dots\dots \star$$

$\vdots$

$$X_{k-1}X_k : B_1B_2 = X_kX : XB_1 = X_kD : BB_1 \dots\dots \star$$

☆から★までのすべての式より、

$$AX_1 : CE = X_1X_2 : B_{k-1}C = \dots = X_{k-1}X_k : B_1B_2 = X_kD : BB_1 \dots\dots ⑥$$

⑤⑥より、 $AX_1 = X_1X_2 = \dots = X_{k-1}X_k = X_kD$

すなわち、 $X_1, X_2, \dots, X_{k-1}, X_k$ は AD の $k+1$ 等分点である。

(q.e.d.)