

注1数学B 2学期 平行線と比 テキスト本問解答

§2 平行線と比の定理1

※ 欠席してしまった場合は、問 2.2～問 2.5 を自分で確認し、p16,17 の宿題に取り組んで提出してください。余裕があれば全問解きましょう。

問2.1

問 2.1 を解決するためには問 2.2，問 2.4 のような定理があると便利です。

そこで、問 2.2 ～問 2.4 を先に解決しておきましょう。

問2.2

[仮定] $AP \parallel BQ \parallel CR \parallel DS \cdots$ ①

$AB=CD \cdots$ ②

[結論] $PQ=RS$

[証明] 直線 BQ, DS 上にそれぞれ点 X, Y を、

$PS \parallel AX \parallel CY \cdots$ ③

となるようにとる。

①③より、 $PQXA, RSYC$ は平行四辺形なので、

$PQ=AX, RS=CY \cdots$ ④

$\triangle ABX$ と $\triangle CDY$ において、

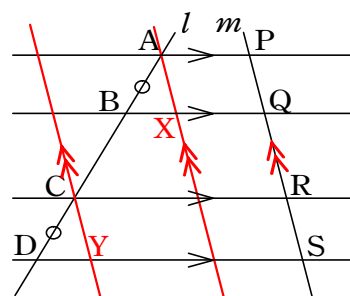
①より、 $\angle ABX = \angle CDY$ (同位角定理) $\cdots$ ⑤

③より、 $\angle BAX = \angle DCY$ (同位角定理) $\cdots$ ⑥

②⑤⑥より、 $\triangle ABX \equiv \triangle CDY$ (二角夾辺相等) $\cdots$ ⑦

⑦より、 $AX=CY$ (合同の対応辺) $\cdots$ ⑧

④⑧より、 $PQ=RS$ (q.e.d.)



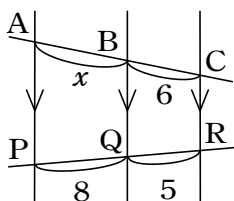
問2.3

- (1) $AP \parallel BQ \parallel CR$ なので、
平行線と比の定理より、

$$AB : BC = PQ : QR$$

$$x : 6 = 8 : 5$$

$$x = \frac{48}{5}$$

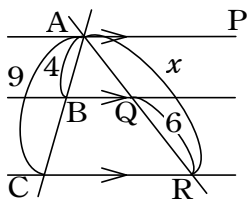


- (2) $AP \parallel BQ \parallel CR$ なので、
平行線と比の定理より、

$$AR : QR = AC : BC$$

$$x : 6 = 9 : (9 - 4)$$

$$x = \frac{54}{5}$$



(注) AP は補助的に引いてあるだけで、

$BQ \parallel CR$ という仮定のみで

$$AR : QR = AC : BC$$

が言えることになります。

問2.4

(1)

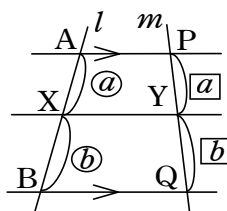
[仮定]

$AP \parallel BQ$ ①

$AX : XB = PY : YQ$ ②

[結論]

$AP \parallel XY$



[証明]

X を通り AP に平行な直線と m の交点を Z とおく。①と合わせて、

$AP \parallel XZ \parallel BQ$ ③

③より $AX : XB = PZ : ZQ$ (平行線と比の定理) ④

②, ④より $PY : YQ = PZ : ZQ$ ⑤

⑤より、 PQ を同じ比に内分する点なので、 Y, Z は一致する。

よって、③より、 $AP \parallel XY$ (q.e.d.)

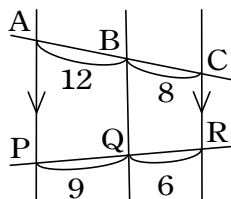
(注) テキストのもうひとつの図においても全く同じ議論をすることができます。

(2)

(i) $AP \parallel CR, AB : BC = PQ : QR (= 3 : 2)$

なので、平行線と比の定理の逆より、

$BQ \parallel CR$ である。



(ii) $AP \parallel CR$ であり、さらに $BQ \parallel CR$

だと仮定すると、平行線と比の定理より

$AB : BC = AQ : QR$

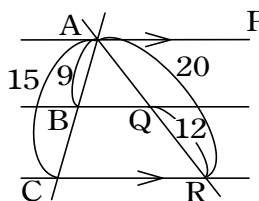
となるはずである。

$AB : BC = 9 : (15 - 9) = 3 : 2$

$AQ : QR = (20 - 12) : 12 = 2 : 3$

なので、 $AB : BC \neq AQ : QR$ であるから

$BQ \parallel CR$ ではない。



(注) AP は補助的に引いてあるだけで、この直線がなくても

$AB : BC = AQ : QR$

が成り立てば $BQ \parallel CR$ 、

成り立たなければ $BQ \parallel CR$ でないと判断できます。

問2.1

図のように記号を置く。

AD, l, m, BC は、平行で等幅なので、

$$AP=PQ=QC \quad \cdots \quad ①$$

$A'D', l', m', B'C'$ は、平行で等幅なので、

$$A'P'=P'Q'=Q'C' \quad \cdots \quad ②$$

とわかる。

①②および $AB' // DC'$ より、

平行線と比の定理の逆から

$$AB' // PP' // QQ' // DC' \quad \cdots \quad ③$$

である。

直線 PP' と $AD, B'C'$ の交点をそれぞれ X, X'

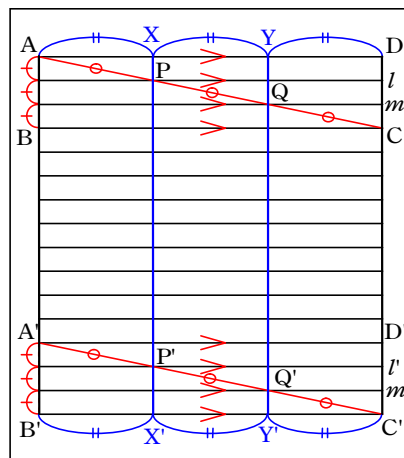
直線 QQ' と $AD, B'C'$ の交点をそれぞれ Y, Y'

とおくと、①③より、

$$AX=XY=YD, B'X'=X'Y'=Y'C'$$

となる。

よって、 PP', QQ' の延長線を引けば3等分できるとわかる。



問2.5

$AD // GH // EC$ なので

平行線と比の定理より、

$$DH:HC = AG:GE = 3:2 (= 9:6) \cdots ①$$

$GH // BC$ なので

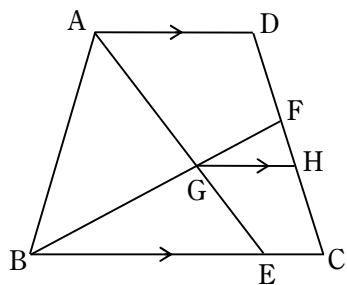
平行線と比の定理より、

$$FH:HC = FG:GB = 1:3 (= 2:6) \cdots ②$$

①②より、

$$DH:FH:HC=9:2:6$$

$$\text{よって、} DF:FC=(9-2):(2+6)=\boxed{7:8}$$



問2.6

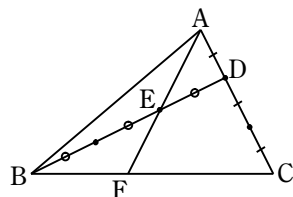
[仮定]

$$AD:DC=1:2 \quad \dots\dots\dots ①$$

$$BE:ED=2:1 \quad \dots\dots\dots ②$$

[結論]

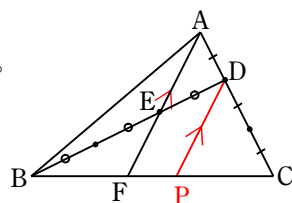
$$3BF=2FC$$



[証明]

点 D から AF に平行な直線を引き、辺 BC との交点を P とおく。

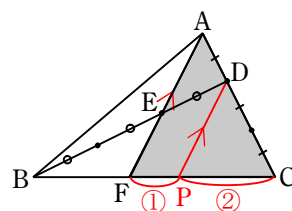
すなわち、 $AF \parallel DP \quad \dots\dots\dots ③$



すると、 $\triangle CAF$ において、

③より、 $FP:PC=AD:DC$ (平行線と比の定理) ④

①④より、 $FP:PC=1:2 \quad \dots\dots\dots ⑤$

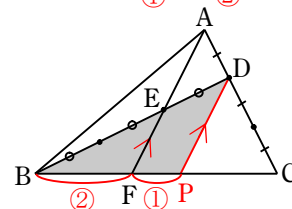


また、 $\triangle BDP$ において、

③より、 $EF \parallel DP$ なので、

$BF:FP=BE:ED$ (平行線と比の定理) ⑥

②⑥より、 $BF:FP=2:1 \quad \dots\dots\dots ⑦$



⑤⑦より、 $BF:FP:PC=2:1:2$

$$\therefore BF:FC=BF:(FP+PC)=2:(1+2)=2:3$$

よって、 $3BF=2FC$ (q.e.d.)