

中1数学A 相似、面積比、確率 テキスト本問解答

§ 7 相似拡大と相似条件

※ 欠席してしまった場合は、問 7.1 ～ 問 7.5 を自分で確認し、p12, 13 の宿題の H7.1, H7.3 に取り組んで提出してください。余裕があれば全問解きましょう。

問7.1

〔仮定〕

$$OA' = 3OA \dots\dots\dots ①$$

$$OB' = 3OB \dots\dots\dots ②$$

(1) 〔結論〕 $AB \parallel A'B'$

〔証明〕

$$①②より、OA:OA' = OB:OB' [=1:3] \dots\dots\dots ③$$

$$③より、\boxed{AB \parallel A'B'} \dots\dots\dots ④ \quad (\text{平行線と比の定理の逆})$$

(q.e.d.)

(2) ④より、 $AB:A'B' = OA:OA'$ (平行線と比の定理)

$$\text{これと①より、} AB:A'B' = \boxed{1:3}$$

(q.e.d.)

(3) 〔結論〕 線分 $A'B'$ は線分 AB の 3 倍の相似拡大

〔証明〕

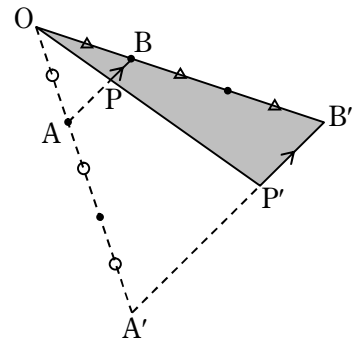
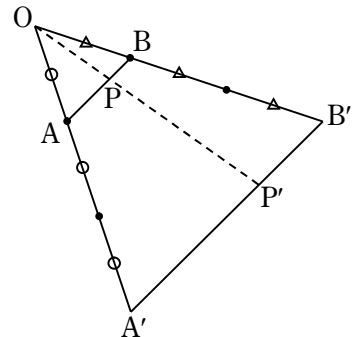
線分 AB 上に点 P を取り、 OP の延長と $A'B'$ の交点を P' とすると、④より、 $AP \parallel A'P'$ であるから

$$\begin{aligned} OP:OP' &= OA:OA' \quad (\text{平行線と比の定理}) \\ &= 1:3 \quad (\because ③) \end{aligned}$$

である。よって、 P' は OP を P の側に 3 倍に延長して得られる点に他ならない。

いま、 P が AB 上を動くとき、 P' は $A'B'$ をくまなく動くので、 $A'B'$ は O を中心とした AB の 3 倍の相似拡大である。 (q.e.d.)

(注) P' を「 O を中心として P を 3 倍に相似拡大した点」といいます。

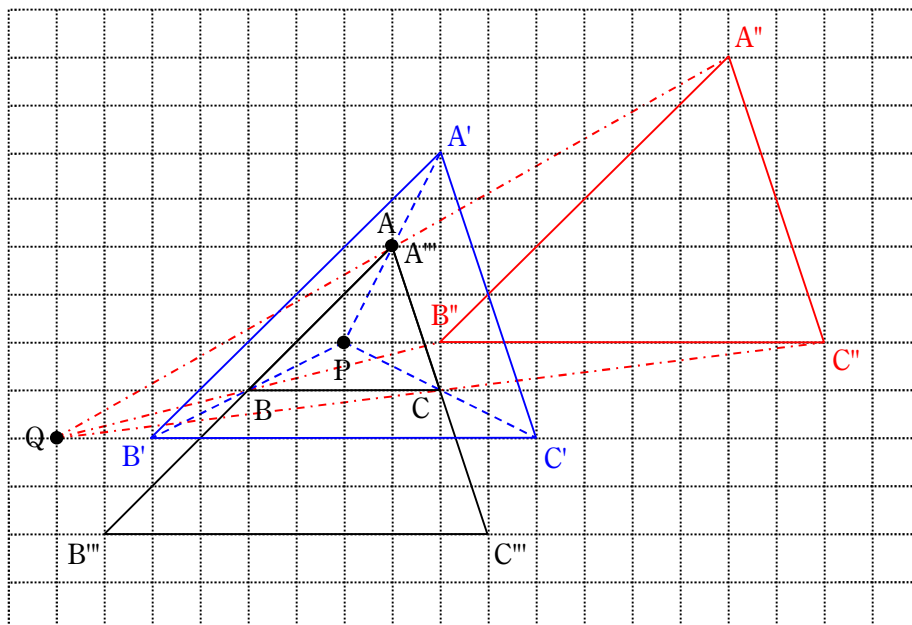


このことから、 O を中心として線分 AB を 3 倍に相似拡大した図形は AB と平行で、長さが 3 倍の線分となることが分かります。

また、「3 倍」を「 k 倍」にしても、平行線と比の定理／平行線と比の定理の逆があるので、同様のことが証明でき、 O を中心として線分 AB を k 倍に相似拡大した図形は AB と平行で、長さが k 倍の線分となることが分かります。特に、線分の相似拡大は、端点を相似拡大して得られる点をつないだ線分になっていることに注意しましょう。

問7.2

線分の相似拡大は、端点を相似拡大して得られる点をつないだ線分になっていることから、三角形の相似拡大は3頂点の相似拡大を3頂点にもつ三角形になることが分かります。



また、相似の中心が P , Q , A のいずれであっても、 $\triangle ABC$ を2倍に相似拡大した図形は合同な三角形になっていることが見て取れます。実際、どの点を中心に2倍に相似拡大しても、得られる三角形は $\triangle ABC$ の3辺のちょうど2倍の長さの3辺をもつ三角形なので、三辺相等ですべて合同になっています。このことは、相似拡大の倍率が「2倍」でなく「 k 倍」であっても同様に成り立ちます。

問7.3

どの条件の証明も、相似拡大したものと合同になることを示すという点では同様なので、
 (1)はきちんと証明し、(2)(3)は略証を書いております。

(1) **二辺比夾角相等**: $\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ において、
 $\angle A = \angle P, AB:PQ = AC:PR$ ならば $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

[仮定] $\angle A = \angle P$ ①

$AB:PQ = AC:PR$ ②

[結論] $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

[証明]

②より、 $\frac{PQ}{AB} = \frac{PR}{AC}$ ($=k$ とおく) なので、

$\triangle ABC$ を、頂点 A を中心として、 $k \left(= \frac{PQ}{AB} = \frac{PR}{AC} \right)$ 倍に相似拡大して得られる三角形を

$\triangle AB'C'$ とおくと、 $\triangle AB'C'$ と $\triangle PQR$ において、

$AB' = AB \times k = PQ$ ③

$AC' = AC \times k = PR$ ④

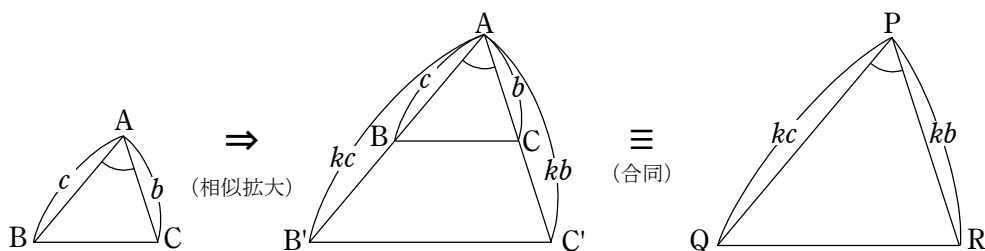
$\angle B'AC' = \angle A = \angle P$ (①より) ⑤

③④⑤より、 $\triangle AB'C' \equiv \triangle PQR$ (二辺夾角相等)

したがって、 $\triangle PQR$ は、 $\triangle ABC$ の相似拡大である $\triangle AB'C'$ と合同なので、
 $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

である。

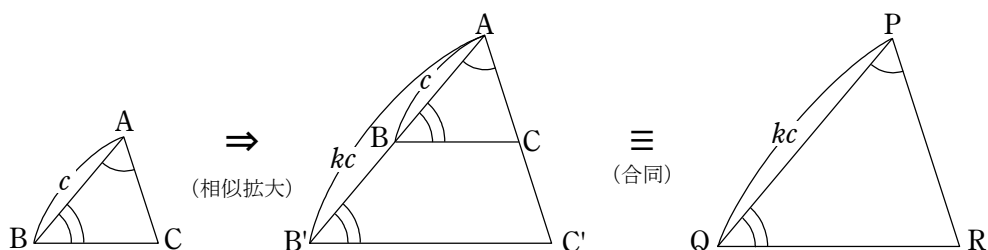
(q.e.d.)



(2) **二角相等**: $\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ において、
 $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q$ ならば $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

[略証]

$\triangle ABC$ を、頂点 A を中心として、 $\frac{PQ}{AB} (=k \text{ とおく})$ 倍に相似拡大して得られる三角形を $\triangle AB'C'$ とおくと、 $\triangle AB'C'$ と $\triangle PQR$ において、相似拡大の対応定理より、
 $AB' = kAB = PQ$, $\angle B' = \angle B$ が成り立ち、仮定より、 $\angle A = \angle P, \angle B' = \angle B = \angle Q$
したがって、二角夾辺相等より $\triangle AB'C' \equiv \triangle PQR$ となり、
 $\triangle PQR$ は、 $\triangle ABC$ の相似拡大である $\triangle AB'C'$ と合同なので、 $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ である。



(3) **三辺比相等**: $\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ において、
 $AB:PQ = AC:PR = BC:QR$ ならば $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

[略証]

仮定より、 $\frac{PQ}{AB} = \frac{PR}{AC} = \frac{QR}{BC} (=k \text{ とおく})$ なので、

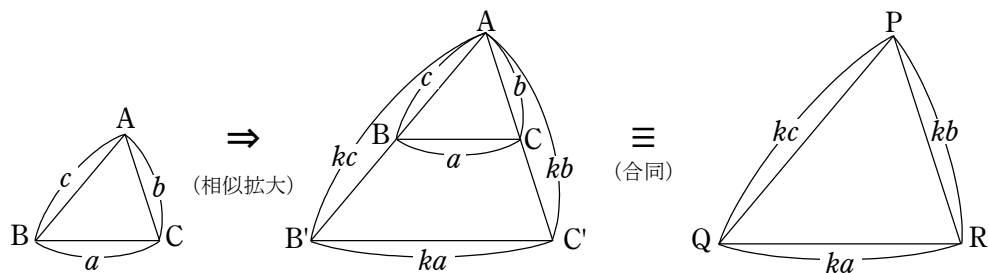
$\triangle ABC$ を、頂点 A を中心として、 $k \left(= \frac{PQ}{AB} = \frac{PR}{AC} = \frac{QR}{BC} \right)$ 倍に相似拡大して得られる

三角形を $\triangle AB'C'$ とおくと、 $\triangle AB'C'$ と $\triangle PQR$ において、

$AB' = kAB = PQ$, $AC' = kAC = PR$, $B'C' = kBC = QR$

したがって、三辺相等より $\triangle AB'C' \equiv \triangle PQR$ となり、

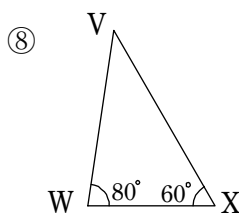
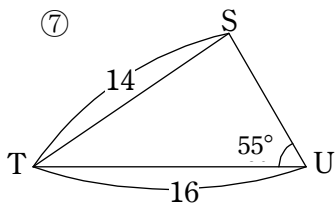
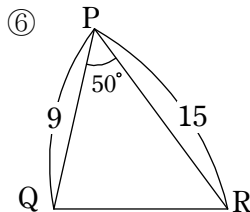
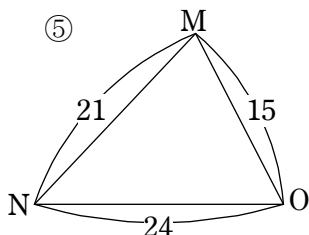
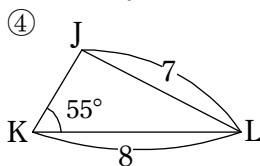
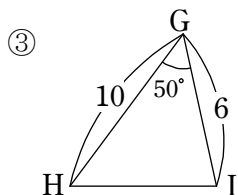
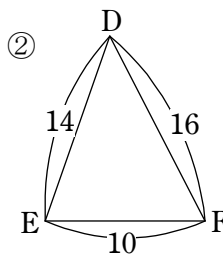
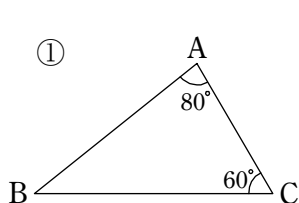
$\triangle PQR$ は、 $\triangle ABC$ の相似拡大である $\triangle AB'C'$ と合同なので、 $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ である。



問7.4

① $\circ$ ⑧ (二角相等)、② $\circ$ ⑤ (三辺比相等)、③ $\circ$ ⑥ (二辺比夾角相等)

※ ④と⑦は、互いに等しい角が、対応する比が等しい二辺の夾角ではないので、相似とは限りません。



問7.5

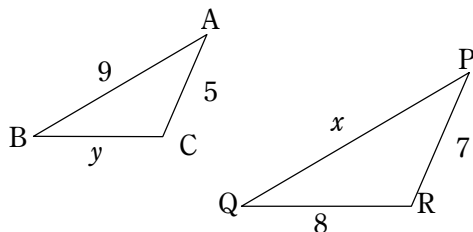
$\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ より、 $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ (二角相等) なので、
対応辺の比を考える。

(1) $AB:PQ=AC:PR$ (対応辺の比) より、

$$9:x=5:7 \text{ なので、} x=9 \times \frac{7}{5} = \boxed{\frac{63}{5}}$$

$BC:QR=AC:PR$ (対応辺の比) より、

$$y:8=5:7 \text{ なので、} y=8 \times \frac{5}{7} = \boxed{\frac{40}{7}}$$

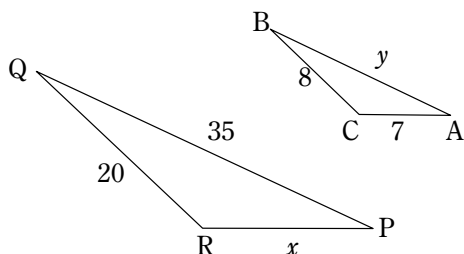


(2) $AC:PR=BC:QR$ (対応辺の比) より、

$$7:x=8:20 \text{ なので、} x=7 \times \frac{20}{8} = \boxed{\frac{35}{2}}$$

$AB:PQ=BC:QR$ (対応辺の比) より、

$$y:35=8:20 \text{ なので、} y=35 \times \frac{8}{20} = \boxed{14}$$



(3) $AB:PQ=BC:QR$ (対応辺の比) より、

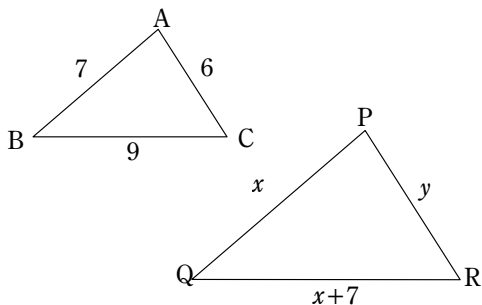
$$7:x=9:(x+7) \text{ なので、}$$

$$9x=7(x+7)$$

$$9x=7x+49 \quad \therefore x=\boxed{\frac{49}{2}}$$

$AC:PR=AB:PQ$ (対応辺の比) より、

$$6:y=7:x \text{ なので、} y=6 \times \frac{x}{7} = \frac{6}{7} \times \frac{49}{2} = \boxed{21}$$



問7.6

(1)

〔仮定〕

$\angle A = 90^\circ$ ①

$AH \perp BC$ ②

〔結論〕 $\triangle ABC \sim \triangle HBA \sim \triangle HAC$

〔証明〕

$\triangle ABC$ と $\triangle HBA$ において

共通なので $\angle ABC = \angle HBA$ ③

①②より $\angle BAC = \angle BHA$ ④

③④より $\triangle ABC \sim \triangle HBA$ (二角相等)⑤

$\triangle ABC$ と $\triangle HAC$ において

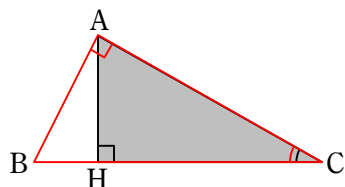
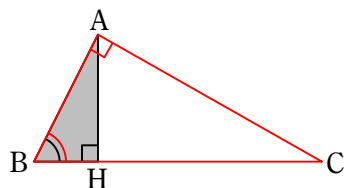
共通なので $\angle ACB = \angle HCA$ ⑥

①②より $\angle BAC = \angle AHC$ ⑦

⑥⑦より $\triangle ABC \sim \triangle HAC$ (二角相等)⑧

⑤⑧より $\triangle ABC \sim \triangle HBA \sim \triangle HAC$

(q.e.d.)



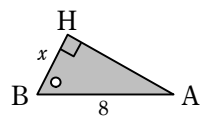
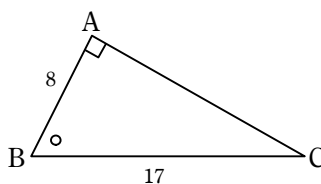
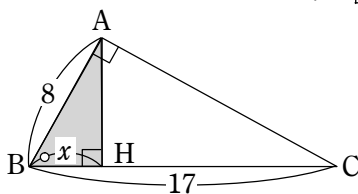
(2)

(1)で証明した相似を使います。

(i) $\triangle ABC \sim \triangle HBA$ (二角相等) なので、

対応辺の比より、 $CB : AB = AB : HB$

$$\text{よって、} 17 : 8 = 8 : x \quad \therefore x = 8 \times \frac{8}{17} = \frac{64}{17}$$



(ii) $\triangle AHC \sim \triangle CHB$ (二角相等) なので、

対応辺の比より、 $AH : CH = CH : BH$

$$\text{よって、} 8 : 6 = 6 : x \quad \therefore x = 6 \times \frac{6}{8} = \frac{9}{2}$$

