中1数学A　相似、面積比、確率　テキスト本問解答
§10　面積比と線分比

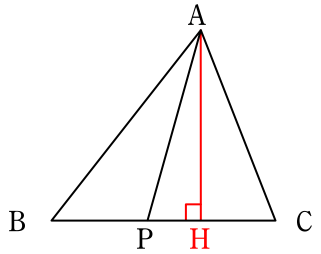
※　欠席してしまった場合は、問 10.1 ～ 問 10.3 を自分で確認し、p30,31 の宿題に取り組んで提出してください。余裕があれば全問解きましょう。

問10.1

A から BC に下した垂線の足を H とすると

$$\triangle ABP : \triangle ACP = {}^{1}\cancel{\frac{1}{2}} \times BP \times \cancel{AH}^{1} : {}^{1}\cancel{\frac{1}{2}} \times CP \times \cancel{AH}^{1} = BP : CP$$

(q.e.d.)



なお、比の取り方は、$\triangle ABP : \triangle ACP = BP : CP$ と同等であればよく、例えば

$\triangle ABC : \triangle ABP = BC : BP$

のように取っても構いません。

問10.2

（解法①）

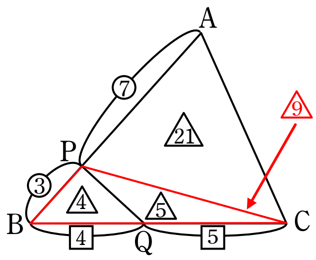
$\triangle PBQ : \triangle PCQ = BQ : CQ = 4 : 5$

$\triangle CBP : \triangle CAP = BP : AP = 3 : 7 = 9 : 21$

なので、

$$\triangle PCQ = \frac{5}{21+4+5} \times \triangle ABC = \frac{1}{6} \times \triangle ABC$$

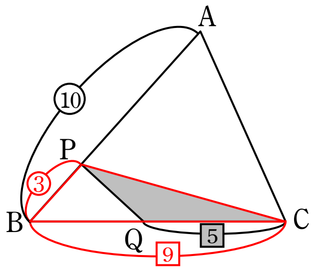
よって $\boxed{\frac{1}{6}\text{倍}}$



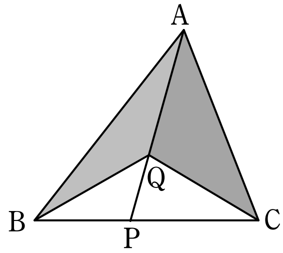
（解法②）

$$\triangle PCQ = \frac{CQ}{BC} \times \triangle PBC = \frac{CQ}{BC} \times \frac{PB}{AB} \times \triangle ABC$$
$$= \frac{5}{9} \times \frac{3}{10} \times \triangle ABC = \frac{1}{6} \times \triangle ABC$$

よって $\boxed{\frac{1}{6}\text{倍}}$



問10.3



$$\triangle ABQ = \frac{AQ}{AP}\triangle ABP, \triangle ACQ = \frac{AQ}{AP}\triangle ACP$$

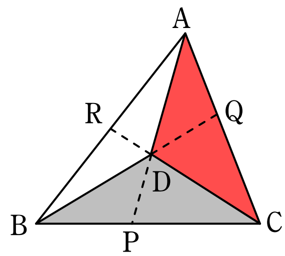
だから、

$$\begin{aligned}\triangle ABQ : \triangle ACQ &= \frac{\cancel{AQ}}{\cancel{AP}}\triangle ABP : \frac{\cancel{AQ}}{\cancel{AP}}\triangle ACP \\ &= \triangle ABP : \triangle ACP \\ &= BP : CP \qquad \text{(q.e.d.)}\end{aligned}$$

(注) テキストに載っているもう一つの図においても全く同じ議論が通用します。

問10.4

［面積比による証明］

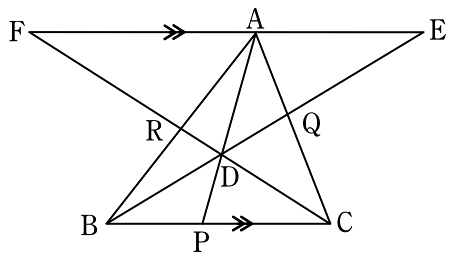


$$\frac{RB}{AR} = \frac{\triangle BCD}{\triangle CAD}, \frac{PC}{BP} = \frac{\triangle CAD}{\triangle ABD}, \frac{QA}{CQ} = \frac{\triangle ABD}{\triangle BCD}$$

であるから、

$$\frac{RB}{AR} \times \frac{PC}{BP} \times \frac{QA}{CQ} = \frac{\triangle BCD}{\triangle CAD} \times \frac{\triangle CAD}{\triangle ABD} \times \frac{\triangle ABD}{\triangle BCD} = 1 \qquad \text{(q.e.d.)}$$

［平行線と比の定理による証明］



A を通り BC と平行な直線と直線 BD,CD との交点をそれぞれ E,F とする。

すなわち、BC // EF … ①

①より、平行線と比の定理を用いて、

$$\frac{RB}{AR} = \frac{BC}{FA}, \frac{QA}{CQ} = \frac{AE}{BC} \quad \cdots ②$$

①より、平行線と比の定理を用いて、

$$\frac{AE}{BP} = \frac{DA}{PD} = \frac{FA}{PC}$$

よって、$\dfrac{PC}{BP} = \dfrac{FA}{AE}$ … ③

②③より、

$$\frac{RB}{AR} \times \frac{PC}{BP} \times \frac{QA}{CQ} = \frac{BC}{FA} \times \frac{FA}{AE} \times \frac{AE}{BC} = 1 \qquad \text{(q.e.d.)}$$