

中1数学B 相似、面積比、確率 テキスト本問解答

§ 7 相似拡大と相似条件

※ 欠席してしまった場合は、問 7.1, 問 7.2, 問 7.3, 問 7.5 を自分で確認し、p12,13 の宿題に取り組んで提出してください。余裕があれば全問解きましょう。

問7.1

[仮定]

$$OA' = 3OA \dots\dots\dots ①$$

$$OB' = 3OB \dots\dots\dots ②$$

(1) [結論] $AB \parallel A'B'$

[証明]

$$①②より、OA:OA' = OB:OB' [=1:3] \dots\dots\dots ③$$

$$③より、\boxed{AB \parallel A'B'} \dots\dots\dots ④ \quad (\text{平行線と比の定理の逆})$$

(q.e.d.)

(2) ④より、 $AB:A'B' = OA:OA' = 1:3$ (平行線と比の定理)

$$\text{これと①より、} AB:A'B' = \boxed{1:3}$$

(3) [結論] 線分 $A'B'$ は線分 AB の 3 倍の相似拡大

[証明]

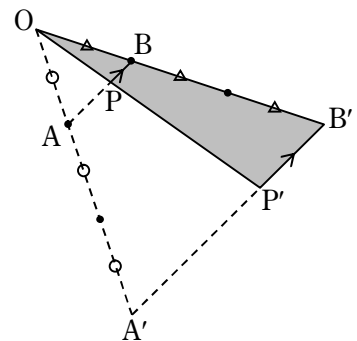
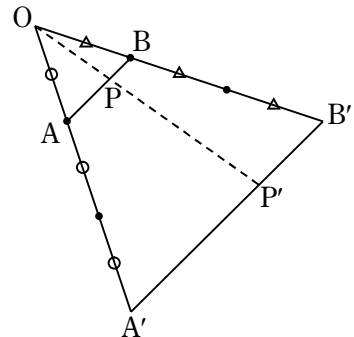
線分 AB 上に点 P を取り、 OP の延長と $A'B'$ の交点を P' とすると、④より、 $AP \parallel A'P'$ であるから

$$\begin{aligned} OP:OP' &= OA:OA' \quad (\text{平行線と比の定理}) \\ &= 1:3 \quad (\because ③) \end{aligned}$$

である。よって、 P' は OP を P の側に 3 倍に延長して得られる点に他ならない。

いま、 P が AB 上を動くとき、 P' は $A'B'$ をくまなく動くので、 $A'B'$ は O を中心とした AB の 3 倍の相似拡大である。 (q.e.d.)

(注) P' を「 O を中心として P を 3 倍に相似拡大した点」といいます。

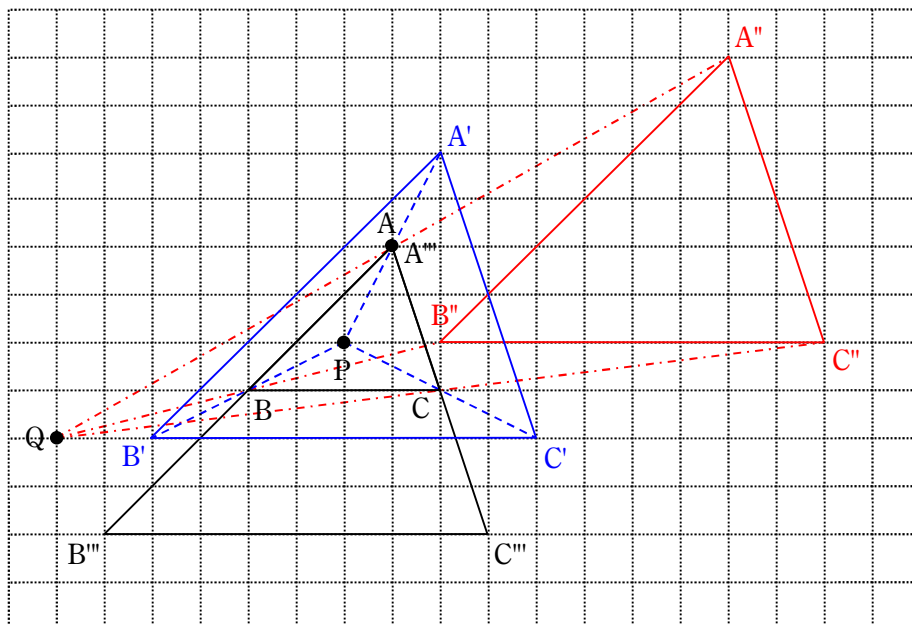


このことから、 O を中心として線分 AB を 3 倍に相似拡大した図形は AB と平行で、長さが 3 倍の線分となることが分かります。

また、「3 倍」を「 k 倍」にしても、平行線と比の定理／平行線と比の定理の逆があるので、同様のことが証明でき、 O を中心として線分 AB を k 倍に相似拡大した図形は AB と平行で、長さが k 倍の線分となることが分かります。特に、線分の相似拡大は、端点を相似拡大して得られる点をつないだ線分になっていることに注意しましょう。

問7.2

線分の相似拡大は、端点を相似拡大して得られる点をつないだ線分になっていることから、三角形の相似拡大は3頂点の相似拡大を3頂点にもつ三角形になることが分かります。



また、相似の中心が P , Q , A のいずれであっても、 $\triangle ABC$ を 2 倍に相似拡大した図形は合同な三角形になっていることが見て取れます。実際、どの点を中心に 2 倍に相似拡大しても、得られる三角形は $\triangle ABC$ の 3 辺のちょうど 2 倍の長さの 3 辺をもつ三角形なので、三辺相等ですべて合同になっています。このことは、相似拡大の倍率が「2 倍」でなく「 k 倍」であっても同様に成り立ちます。

問7.3

どの条件の証明も同様なので、(1)はきちんと証明し、(2)(3)は略証を述べるにとどめることにします。

- (1) **二辺比夾角相等**: $\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ において、
 $\angle A = \angle P, AB:PQ = AC:PR$
 ならば $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

[仮定]

$\angle A = \angle P$ ①

$AB:PQ = AC:PR$ ②

[結論] $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

[証明]

$\triangle ABC$ を (ある点 O を中心として)

$\frac{PQ}{AB}$ 倍に相似拡大して得られる三角形を

$\triangle DEF$ とおくと、

$$DE = AB \times \frac{PQ}{AB} = PQ \text{ ③}$$

$$\text{②より、} DF = AC \times \frac{PQ}{AB} = AC \times \frac{PR}{AC} = PR \text{ ④}$$

であり、また、相似拡大の対応定理より

$$\angle D = \angle A \text{ ⑤}$$

したがって、 $\triangle DEF$ と $\triangle PQR$ において、

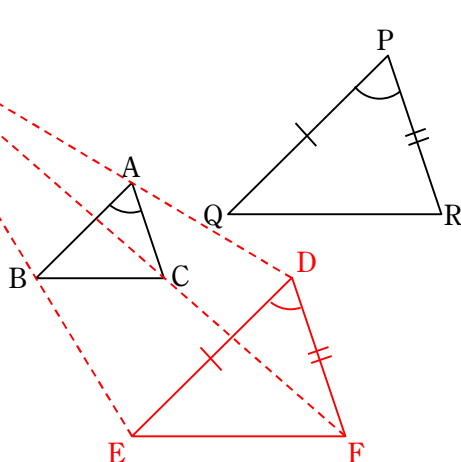
$$\text{①⑤より } \angle D = \angle P \text{ ⑥}$$

$$\text{③④⑥より } \triangle DEF \equiv \triangle PQR \text{ (二辺夾角相等) ⑦}$$

$\triangle PQR$ は、 $\triangle ABC$ の相似拡大である $\triangle DEF$ と合同なので、
 $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

である。

(q.e.d.)



(2) **二角相等:** $\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ において、
 $\angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$
ならば $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

証明は(1)と同様、次のようにしてできる。

$\triangle ABC$ を $\frac{QR}{BC}$ 倍に相似拡大して得られる三角形を $\triangle DEF$ とおくと、 $\triangle DEF$ と $\triangle PQR$ に

において、 $EF = BC \times \frac{QR}{BC} = QR$

また、相似拡大の対応定理より、 $\angle E = \angle Q$, $\angle F = \angle R$ が成り立ち、
二角夾辺相等で $\triangle DEF \equiv \triangle PQR$

したがって、 $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ である。

(3) **三辺比相等:** $\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ において、
 $AB : PQ = BC : QR = CA : RP$
ならば $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

$\triangle ABC$ を $\frac{PQ}{AB} \left(= \frac{QR}{BC} = \frac{RP}{CA} \right)$ 倍に相似拡大して得られる三角形を $\triangle DEF$ とおくと、

$\triangle DEF$ と $\triangle PQR$ において $DE = PQ, EF = QR, FD = RP$ が成り立ち、
三辺相等で $\triangle DEF \equiv \triangle PQR$

したがって、 $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ である。

問7.4

- (1) $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ (二角相等) なので、対応辺の比より

$$AB:PQ = AC:PR$$

$$\text{よって、} 5:x = 3:5 \quad \therefore x = 5 \times \frac{5}{3} = \boxed{\frac{25}{3}}$$

再び対応辺の比より

$$AC:PR = BC:QR$$

$$\text{よって、} 3:5 = 6:y \quad \therefore y = 6 \times \frac{5}{3} = \boxed{10}$$

- (2) $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ (二角相等) なので、対応辺の比より

$$AB:PQ = BC:QR$$

$$\text{よって、} 7:x = 9:(x+7) \quad 9x = 7(x+7) \quad 2x = 49 \quad \therefore x = \boxed{\frac{49}{2}}$$

再び対応辺の比より

$$AB:PQ = AC:PR$$

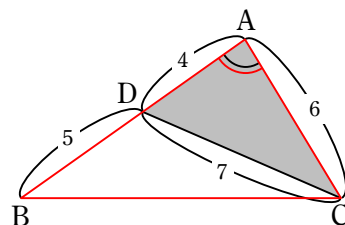
$$\text{よって、} 7:x = 6:y \quad \therefore y = 6 \times \frac{x}{7} = 6 \times \frac{1}{7} \times \frac{49}{2} = \boxed{21}$$

問7.5

二角相等の相似は（二角夾辺相等の合同よりも）簡単に見つかるのですが、二辺比夾角相等の相似は（二辺夾角相等の合同よりも）見つけるのが難しくなります。問題をヒントにして相似な三角形に当たりをつけることが大事になります。

(1) 〔結論〕 $\angle ACD = \angle ABC$

結論から考えれば、二角相等で $\triangle ACD$ と $\triangle ABC$ が相似になっているはずですが。そこで辺の長さを利用して、この相似を証明してしまおうことにしましょう。



〔証明〕

$\triangle ACD$ と $\triangle ABC$ において

$$AC : AB = 6 : 9 = 2 : 3 \quad \text{..... ①}$$

$$AD : AC = 4 : 6 = 2 : 3 \quad \text{..... ②}$$

$$\text{①②より} \quad AC : AB = AD : AC \quad \text{..... ③}$$

$$\text{共通なので} \quad \angle CAD = \angle BAC \quad \text{..... ④}$$

$$\text{③④より} \quad \triangle ACD \sim \triangle ABC \quad (\text{二辺比夾角相等}) \quad \text{..... ⑤}$$

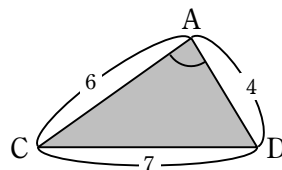
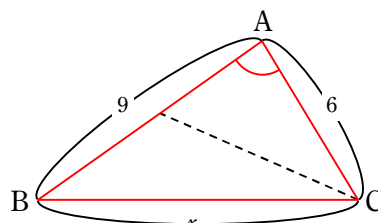
$$\text{⑤より} \quad \angle ACD = \angle ABC \quad (\text{対応角}) \quad (\text{q.e.d.})$$

(2)

$$\text{⑤より} \quad AC : AB = CD : BC \quad (\text{対応辺の比})$$

$$\text{よって} \quad 6 : 9 = 7 : x$$

$$\therefore x = 7 \times \frac{9}{6} = \frac{21}{2}$$



問7.6

[仮定]

$\angle BAC = 90^\circ$ ①

$AH \perp BC$ ②

(1)

$\triangle ABC$ と $\triangle HBA$ において

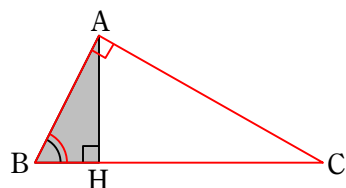
共通なので $\angle ABC = \angle HBA$ ③

①②より $\angle BAC = \angle BHA$ ④

③④より $\triangle ABC \sim \triangle HBA$ (二角相等)⑤

⑤より、 $AB : HB = BC : BA$ (対応辺の比)

これより、 $c : x = a : c \quad \therefore \boxed{c^2 = ax}$



また、 $\triangle ABC$ と $\triangle HAC$ において

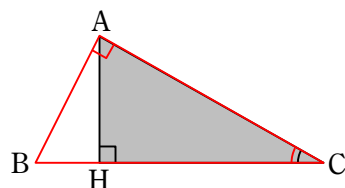
共通なので $\angle ACB = \angle HCA$ ⑥

①②より $\angle BAC = \angle AHC$ ⑦

⑥⑦より $\triangle ABC \sim \triangle HAC$ (二角相等)⑧

⑧より、 $AC : HC = BC : AC$ (対応辺の比)

これより、 $b : y = a : b \quad \therefore \boxed{b^2 = ay}$



(2)

$x + y = BH + HC = BC = a \quad \therefore x + y = a$

であることに注意すれば、(1)の結果より、

$c^2 + b^2 = ax + ay = a(x + y) = a \times a = a^2 \quad \therefore b^2 + c^2 = a^2$

(q.e.d.)