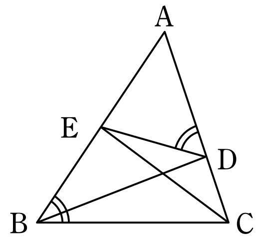
中１数学B　相似、面積比、確率　テキスト本問解答
§９　相似な図形を探せ２

※　欠席してしまった場合は、問 9.1, 問 9.4 を自分で確認し、p21 の宿題に取り組んで提出してください。余裕があれば全問解きましょう。

問9.1

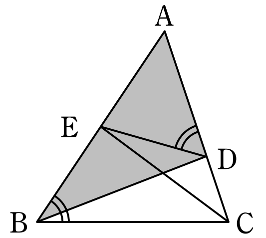
［仮定］　$\angle ABC = \angle ADE$ ……………………………①
［結論］　$\angle ABD = \angle ACE$



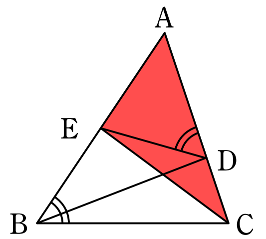
結論が成立するならば、$\angle ABD = \angle ACE$ および $\angle A$ 共通から、$\triangle ABD$ と $\triangle ACE$ は相似になります。逆にこの相似を示せば、$\angle ABD = \angle ACE$ が言えます。
$\triangle ABD \backsim \triangle CAE$ を示すには共通な $\angle A$ を挟む 2 辺の比の等式

$$AB : AC = AD : AE \ \ldots\ldots ☆$$

が言えれば OK です。☆を目標として考えてみましょう。



［証明］
$\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ において
共通なので　$\angle BAC = \angle DAE$ …………………………②
①②より　　$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$　（二角相等）….③



$\triangle ABD$ と $\triangle ACE$ において
③より　　　$AB : AD = AC : AE$　（対応辺の比）
すなわち　　$AB : AC = AD : AE$　（対応辺の比）……………④
共通なので　$\angle BAD = \angle CAE$ ……………………………………⑤
④⑤より　　$\triangle ABD \backsim \triangle ACE$　（二辺比夾角相等）………⑥
⑥より　　　$\angle ABD = \angle ACE$　（対応角）

(q.e.d.)

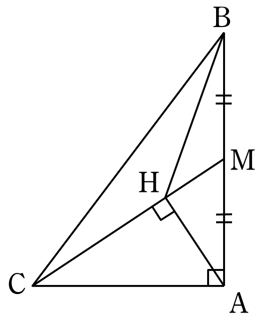
問9.2

［仮定］　$\angle \mathrm{BAC} = 90°$ ……………………………①

　　　　　$\mathrm{AM} = \mathrm{MB}$ ……………………………②

　　　　　$\mathrm{AH} \perp \mathrm{CM}$ ……………………………③

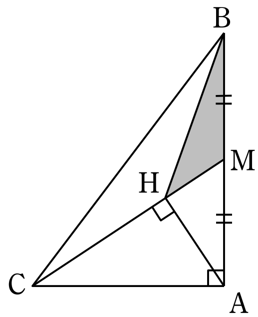
［結論］　$\angle \mathrm{MBH} = \angle \mathrm{MCB}$



結論が成り立つということは、$\angle \mathrm{MBH} = \angle \mathrm{MCB}$ および $\angle \mathrm{M}$ 共通が言えるので、$\triangle \mathrm{MBH}$ と $\triangle \mathrm{MCB}$ が相似になるということです。逆にこの相似が示せれば、結論が言えます。共通な $\angle \mathrm{M}$ を挟む 2 辺の比の等式

　　BM：CM=MH：MB……☆

が言えれば OK です。☆を目標として考えてみましょう。



［証明］

$\triangle \mathrm{HMA}$ と $\triangle \mathrm{AMC}$ において

①③より　$\angle \mathrm{AHM} = \angle \mathrm{CAM}\ (=90°)$ ……………………④

共通なので　$\angle \mathrm{AMH} = \angle \mathrm{CMA}$ ……………………⑤

④⑤より　$\triangle \mathrm{HMA} \backsim \triangle \mathrm{AMC}$ （二角相等） ……………⑥

$\triangle \mathrm{MBH}$ と $\triangle \mathrm{MCB}$ において

⑥より　$\underline{\mathrm{AM}} : \mathrm{CM} = \mathrm{MH} : \underline{\mathrm{MA}}$ （対応辺の比） ………⑦

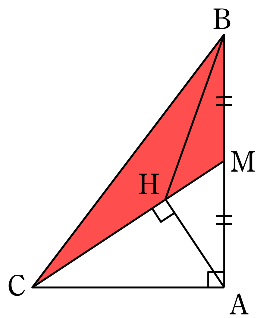
②⑦より　$\underline{\mathrm{BM}} : \mathrm{CM} = \mathrm{MH} : \underline{\mathrm{MB}}$ ……………………⑧

共通なので　$\angle \mathrm{BMH} = \angle \mathrm{CMB}$ ……………………⑨

⑧⑨より　$\triangle \mathrm{MBH} \backsim \triangle \mathrm{MCB}$ （二辺比夾角相等） ……⑩

⑩より　$\angle \mathrm{MBH} = \angle \mathrm{MCB}$ （対応角）

(q.e.d.)



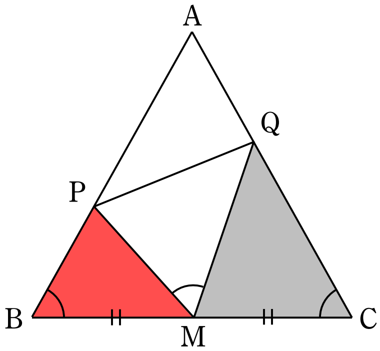
問9.3

［仮定］　∠ABC＝∠ACB ……………………①

BM＝MC ……………………………②

∠PMQ＝∠ABC …………………③

［結論］　∠BPM＝∠MPQ



結論が成り立つということは、③と合わせて、二角相等で△BPM と△MPQ が相似になるということです。逆にこの相似が示せれば、結論が言えます。
③で等しいとわかっている角を挟む 2 辺の比の等式

PB：PM=BM：MQ……☆

が言えれば OK です。☆を目標として考えてみましょう。

［証明］

△BMP と△CQM において

①より　∠PBM＝∠MCQ ……………………④

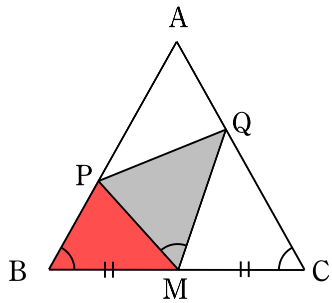
また　∠BPM＝∠PMC－∠ABC　（△BMP で外角定理）

＝∠PMC－∠PMQ　（③より）

＝∠CMQ

∴　∠BPM＝∠CMQ ……………………⑤

④⑤より　△BMP ∽ △CQM　（二角相等） …………⑥



△BPM と△MPQ において

③より　∠PBM＝∠PMQ ……………………⑦

⑥より　PB : <u>MC</u>＝PM : MQ　（対応辺の比） …………⑧

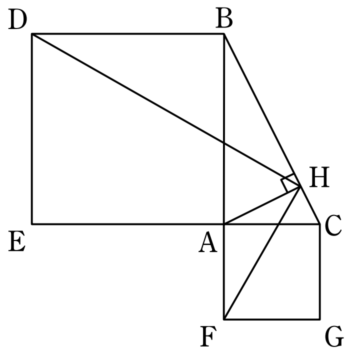
②⑧より　PB : <u>BM</u>＝PM : MQ

すなわち　PB : PM＝BM : MQ ……………………⑨

⑦⑨より　△BPM ∽ △MPQ　（二辺比夾角相等） ………⑩

⑩より　∠BPM＝∠MPQ　（対応角）　(q.e.d.)

問9.4



［仮定］ $\angle BAC = 90^\circ$ ……………………………①

$ABDE$ は正方形 ……………………………②

$AFGC$ は正方形 ……………………………③

$AH \perp BC$ ……………………………④

［結論］ $\angle DHF = 90^\circ$

結論が成立するならば、

$\angle BHD = 90^\circ - \angle DHA = \angle AHF$

が言えます。

①から $\angle ABH = \angle CAH$ がすぐにわかるので、②③と合わせると

$\angle DBH = \angle FAH$ ……☆

が言えます。

これらを合わせて、$\triangle DBH$ と $\triangle FAH$ は相似になります。逆にこの相似を示せば、$\angle DHF = 90^\circ$ が言えます。

$\triangle DBH$ と $\triangle FAH$ について☆が成立つので、$\triangle DBH \backsim \triangle FAH$ を示すには、☆の角を挟む 2 辺の比の等式

$DB : FA = BH : AH$ ……☆☆

が言えれば OK です。☆☆を目標として考えてみましょう。

［証明］

$\triangle ABH$ と $\triangle CAH$ において

④より $\angle AHB = \angle CHA\ (= 90^\circ)$ ……………………………⑤

また $\angle ABH = \angle AHC - \angle BAH$ （$\triangle ABH$ で外角定理）

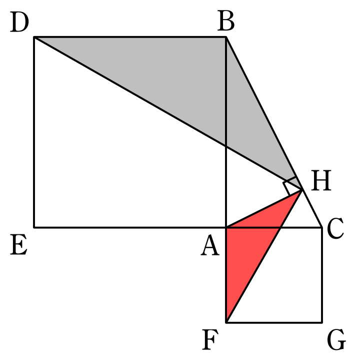
$= 90^\circ - \angle BAH$ （④より）

$= \angle BAC - \angle BAH$ （①より）

$= \angle CAH$

∴ $\angle ABH = \angle CAH$ ……………………………⑥

⑤⑥より $\triangle ABH \backsim \triangle CAH$ （二角相等） ……………………⑦



$\triangle DBH$ と $\triangle FAH$ において

⑦より $AB : CA = BH : AH$ （対応辺の比） ……………⑧

$DB : FA = AB : CA$ （②③より）

$= BH : AH$ （⑧）

∴ $DB : FA = BH : AH$ ……………………………⑨

また $\angle DBH = \angle DBA + \angle ABH$

$= 90^\circ + \angle ABH$ （②より） ……………⑩

$\angle FAH = \angle FAC + \angle CAH$

$= 90^\circ + \angle CAH$ （③より） ……………⑪

⑥⑩⑪より $\angle DBH = \angle FAH$ ……………………………⑫

⑨⑫より $\triangle DBH \backsim \triangle FAH$ （二辺比夾角相等） ………⑬

⑬より $\angle DHB = \angle FHA$ （対応角） ……………………⑭

よって　$\angle DHF = \angle DHA + \angle FHA$

$= \angle DHA + \angle DHB$ （⑭より）

$= \angle AHB$

$= 90^\circ$ （④より）　(q.e.d.)