中1数学A 2019年度春期講習 文字式とその応用
§4 大小の評価

※ 欠席してしまった場合は、問 4.1, 問 4.2 を確認し、p.31 の宿題 H4.1〜H4.3 に取り組んで提出して下さい。余裕があれば全問解きましょう。

問4.1

(1) $\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{3}{3n+3}>\dfrac{3}{3n+4}$ なので、$\boxed{\dfrac{1}{n+1}\text{の方が大きい}}$。

ここで、$\boxed{a<b\text{のとき}\dfrac{c}{a}>\dfrac{c}{b}}$ を用いた。

(2) $\dfrac{n}{2n+1}<\dfrac{n}{2n}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{n}{2n+2}<\dfrac{n}{2n}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{n}{2n+3}<\dfrac{n}{2n}=\dfrac{1}{2}$ なので、

$\dfrac{n}{2n+1}+\dfrac{n}{2n+2}+\dfrac{n}{2n+3}<\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$ である。

すなわち、$\boxed{\dfrac{3}{2}\text{の方が大きい}}$。

ここで、$\boxed{a<b\text{かつ}c<d\text{のとき}a+c<b+d}$ を用いた。

(3) $2^3=8, 3^2=9$ なので、$2^3<3^2\ldots$①

$5^3=125,\ 2^7=128$ なので、$5^3<2^7\ldots$②

①より、

$(2^3)^7<(3^2)^7$

$\underbrace{2^3\times2^3\times\cdots\times2^3}_{7\text{個}}<\underbrace{3^2\times3^2\times\cdots\times3^2}_{7\text{個}}$

$2^{3\times7}<3^{2\times7}$

$2^{21}<3^{14}\ldots$③

同様に②より、

$(5^3)^3<(2^7)^3$

$5^9<2^{21}\ldots$④

③,④より、

$5^9<3^{14}$ が成り立つ。

ここで、

$\boxed{a<b\text{のとき}a^n<b^n\ (n\text{は自然数})}$

$\boxed{a<b\text{かつ}b<c\text{のとき}a<c}$

を用いた。

問4.2

(1) $\frac{11}{22}<\frac{11}{12}<\frac{11}{11}$ つまり $\frac{1}{2}<\frac{11}{12}<1$ なので、$\frac{11}{12}$を超えない最大の単位分数は$\frac{1}{2}$です。

$\frac{11}{12}$から$\frac{1}{2}$を引くと$\frac{11}{12}-\frac{1}{2}=\frac{11}{12}-\frac{6}{12}=\frac{5}{12}$ となるので、$\frac{11}{12}=\frac{1}{2}+\frac{5}{12}$ と書けます。

$\frac{5}{15}<\frac{5}{12}<\frac{5}{10}$ つまり $\frac{1}{3}<\frac{5}{12}<\frac{1}{2}$ なので、$\frac{5}{12}$を超えない最大の単位分数は$\frac{1}{3}$です。

$\frac{5}{12}$から$\frac{1}{3}$を引くと$\frac{5}{12}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}-\frac{4}{12}=\frac{1}{12}$ となるので、$\frac{5}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$ と書けます。

以上より、$\boxed{\frac{11}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}}$

$\frac{3}{9}<\frac{3}{7}<\frac{3}{6}$ つまり $\frac{1}{3}<\frac{3}{7}<\frac{1}{2}$ なので、$\frac{3}{7}$を超えない最大の単位分数は$\frac{1}{3}$です。

$\frac{3}{7}$から$\frac{1}{3}$を引くと$\frac{3}{7}-\frac{1}{3}=\frac{9}{21}-\frac{7}{21}=\frac{2}{21}$ となるので、$\frac{3}{7}=\frac{1}{3}+\frac{2}{21}$ と書けます。

$\frac{2}{22}<\frac{2}{21}<\frac{2}{20}$ つまり $\frac{1}{11}<\frac{2}{21}<\frac{1}{10}$ なので、$\frac{2}{21}$を超えない最大の単位分数は$\frac{1}{11}$です。

$\frac{2}{21}$から$\frac{1}{11}$を引くと$\frac{2}{21}-\frac{1}{11}=\frac{22}{231}-\frac{21}{231}=\frac{1}{231}$ となるので、$\frac{2}{21}=\frac{1}{11}+\frac{1}{231}$ と書けます。

以上より、$\boxed{\frac{3}{7}=\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{231}}$

(2) $\frac{2}{4}<\frac{2}{3}<\frac{2}{2}$ なので、$\frac{2}{3}$は$\frac{1}{2}$と$\frac{1}{1}$の間にある。

$\frac{2}{6}<\frac{2}{5}<\frac{2}{4}$ なので、$\frac{2}{5}$は$\frac{1}{3}$と$\frac{1}{2}$の間にある。

$\frac{2}{8}<\frac{2}{7}<\frac{2}{6}$ なので、$\frac{2}{5}$は$\frac{1}{4}$と$\frac{1}{3}$の間にある。

(3) (2)より、$\frac{2}{3}$を超えない最大の単位分数は$\frac{1}{2}$であり、

$\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{4}{6}-\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$なので、$\boxed{\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}$ と表せる。

(2)より、$\frac{2}{5}$を超えない最大の単位分数は$\frac{1}{3}$であり、

$\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{6}{15}-\frac{5}{15}=\frac{1}{15}$なので、$\boxed{\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}}$ と表せる。

(2)より、$\frac{2}{7}$を超えない最大の単位分数は$\frac{1}{4}$であり、

$\frac{2}{7}-\frac{1}{4}=\frac{8}{28}-\frac{7}{28}=\frac{1}{28}$なので、$\boxed{\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}}$ と表せる。

(4) $2n < 2n+1$ より $\dfrac{2}{2n+1} < \dfrac{2}{2n} = \dfrac{1}{n}$ です。

$2n+1 < 2n+2 = 2(n+1)$ より $\dfrac{2}{2n+1} > \dfrac{2}{2(n+1)} = \dfrac{1}{n+1}$ です。

以上より、$\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{2}{2n+1} < \dfrac{1}{n}$ です。

(5) (4)より、$\dfrac{2}{2n+1}$ を超えない最大の単位分数は $\dfrac{1}{n+1}$ なので、

$\dfrac{2}{2n+1}$ から $\dfrac{1}{n+1}$ を引いてみると、

$$\frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2(n+1)-(2n+1)}{(2n+1)(n+1)} = \frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(n+1)} = \frac{1}{(2n+1)(n+1)}$$

これより、

$\boxed{\dfrac{2}{2n+1} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{(2n+1)(n+1)}}$ と表せることがわかります。

問4.3

(1) 好き勝手に予想してみましょう。ちなみに、電卓で計算してみると、

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} = 1.45$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{10} = 1.92896\cdots$$

となります。

(2) $\dfrac{1}{4} > \dfrac{1}{6}$ なので $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4} > \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6} = 1 = \dfrac{2}{2}$ ですが、

$\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{2}$ なので $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ です。

よって、$\boxed{\text{ア}}$に入る最大の自然数は$\boxed{2}$です。

(3) $\dfrac{1}{5} > \dfrac{1}{8}$, $\dfrac{1}{6} > \dfrac{1}{8}$, $\dfrac{1}{7} > \dfrac{1}{8}$ なので $\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8} > \dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2}$ です。

これと(2)でわかっている $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4} > \dfrac{2}{2}$ を合わせて、

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8} > \dfrac{2}{2}+\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ を得ます。

よって、$\boxed{\text{イ}}$には$\boxed{3}$が入ります。

(4) $\dfrac{1}{9} > \dfrac{1}{16}$, $\dfrac{1}{10} > \dfrac{1}{16}$, $\cdots$, $\dfrac{1}{15} > \dfrac{1}{16}$ なので

$\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{10} + \cdots \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{16} > \underbrace{\dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{16} + \cdots + \dfrac{1}{16}}_{8個} = \dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2}$ です。

これと(3)でわかっている $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{8} > \dfrac{3}{2}$ を合わせて、

$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} \cdots + \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{16} > \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{2}$ を得ます。

よって、$\boxed{ウ}$には$\boxed{4}$が入ります。

(5) (3)では $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{2^3} > \dfrac{3}{2}$ がわかっていて、それを利用して

(4)では $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{2^4} > \dfrac{4}{2}$ を導きました。同じように、

$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{2^k} > \dfrac{k}{2}$ がわかっていれば、それと

$$\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \cdots + \frac{1}{2\times 2^k} > \underbrace{\frac{1}{2\times 2^k} + \frac{1}{2\times 2^k} + \cdots + \frac{1}{2\times 2^k}}_{2^k個} = \frac{2^k}{2\times 2^k} = \frac{1}{2}$$

を合わせることで

$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{2\times 2^k} > \dfrac{k}{2} + \dfrac{1}{2}$ を、すなわち、

$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{2^{k+1}} > \dfrac{k+1}{2}$ を導くことができます。

この作業を繰り返すことで、一般に、$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{2^m} > \dfrac{m}{2}$ が成り立つことがわかります。これはどんな大きな自然数 m についても成り立つので、

$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ の値は n を大きくしていくと$\boxed{\text{いくらでも大きくなる}}$ことがわかります。