中1数学B 2019年度春期講習 文字式とその応用
§3 大小の評価

※ 欠席してしまった場合は、問 3.1, 問 3.3, 問 3.4 を確認し、p.24,25 の宿題 H3.1～H3.4 に取り組んで提出して下さい。余裕があれば全問解きましょう。

問3.1

(1) $\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{3}{3n+3}>\dfrac{3}{3n+4}$ なので、$\boxed{\dfrac{1}{n+1}\text{の方が大きい}}$。

ここで、$\boxed{a<b\text{のとき}\dfrac{c}{a}>\dfrac{c}{b}}$ を用いた。

(2) $\dfrac{n}{2n+1}<\dfrac{n}{2n}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{n}{2n+2}<\dfrac{n}{2n}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{n}{2n+3}<\dfrac{n}{2n}=\dfrac{1}{2}$ なので、

$\dfrac{n}{2n+1}+\dfrac{n}{2n+2}+\dfrac{n}{2n+3}<\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$ である。

すなわち、$\boxed{\dfrac{3}{2}\text{の方が大きい}}$。

ここで、

$\boxed{a<b\text{のとき}\dfrac{c}{a}>\dfrac{c}{b}}$

$\boxed{a<b\text{かつ}c<d\text{のとき}a+c<b+d}$ を用いた。

(3) $2^3=8, 3^2=9$ なので、$2^3<3^2$ …①

$5^3=125,\ 2^7=128$ なので、$5^3<2^7$ …②

①より、

$(2^3)^7<(3^2)^7$

$\underbrace{2^3\times2^3\times\cdots\times2^3}_{7\text{個}}<\underbrace{3^2\times3^2\times\cdots\times3^2}_{7\text{個}}$

$2^{3\times7}<3^{2\times7}$

$2^{21}<3^{14}$ …③

同様に②より、

$(5^3)^3<(2^7)^3$

$5^9<2^{21}$ …④

③,④より、

$5^9<3^{14}$ が成り立つ。

ここで、
$\boxed{a<b \text{ のとき } a^n<b^n \ (n\text{は自然数})}$
$\boxed{a<b \text{ かつ } b<c \text{ のとき } a<c}$　を用いた。

問3.2

(1) 好き勝手に予想してみましょう。ちなみに、電卓で計算してみると、

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=1.45$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{10}=1.92896\cdots$$

となります。

(2) $\frac{1}{4}>\frac{1}{6}$ なので $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1=\frac{2}{2}$ ですが、

$\frac{1}{3}<\frac{1}{2}, \frac{1}{4}<\frac{1}{2}$ なので $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ です。

よって、$\boxed{\text{ア}}$に入る最大の自然数は$\boxed{2}$です。

(3) $\frac{1}{5}>\frac{1}{8}, \frac{1}{6}>\frac{1}{8}, \frac{1}{7}>\frac{1}{8}$ なので $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$ です。

これと(2)でわかっている $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{2}{2}$ を合わせて、

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ を得ます。

よって、$\boxed{\text{イ}}$には$\boxed{3}$が入ります。

(4) $\frac{1}{9}>\frac{1}{16}, \frac{1}{10}>\frac{1}{16}, \cdots, \frac{1}{15}>\frac{1}{16}$ なので

$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots\frac{1}{15}+\frac{1}{16}>\underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}}_{8\text{個}}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$ です。

これと(3)でわかっている $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{3}{2}$ を合わせて、

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdots+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}>\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}$ を得ます。

よって、$\boxed{\text{ウ}}$には$\boxed{4}$が入ります。

(5)　(3)では$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^3}>\frac{3}{2}$がわかっていて、それを利用して

(4)では$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^4}>\frac{4}{2}$を導きました。同じように、

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}>\frac{k}{2}$がわかっていれば、それと

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2\times 2^k}>\underbrace{\frac{1}{2\times 2^k}+\frac{1}{2\times 2^k}+\cdots+\frac{1}{2\times 2^k}}_{2^k\text{個}}=\frac{2^k}{2\times 2^k}=\frac{1}{2}$$

を合わせることで

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2\times 2^k}>\frac{k}{2}+\frac{1}{2}$を、すなわち、

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}>\frac{k+1}{2}$を導くことができます。

この作業を繰り返すことで、一般に、$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^m}>\frac{m}{2}$が成り立つことがわかります。これはどんな大きな自然数mについても成り立つので、

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$の値は$n$を大きくしていくと$\boxed{\text{いくらでも大きくなる}}$ことがわかります。

問3.3

$\frac{11}{22}<\frac{11}{12}<\frac{11}{11}$　つまり　$\frac{1}{2}<\frac{11}{12}<1$なので、$\frac{11}{12}$を超えない最大の単位分数は$\frac{1}{2}$です。

$\frac{11}{12}$から$\frac{1}{2}$を引くと$\frac{11}{12}-\frac{1}{2}=\frac{11}{12}-\frac{6}{12}=\frac{5}{12}$　となるので、$\frac{11}{12}=\frac{1}{2}+\frac{5}{12}$　と書けます。

$\frac{5}{15}<\frac{5}{12}<\frac{5}{10}$　つまり　$\frac{1}{3}<\frac{5}{12}<\frac{1}{2}$　なので、$\frac{5}{12}$を超えない最大の単位分数は$\frac{1}{3}$です。

$\frac{5}{12}$から$\frac{1}{3}$を引くと$\frac{5}{12}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}-\frac{4}{12}=\frac{1}{12}$　となるので、$\frac{5}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$　と書けます。

以上より、$\boxed{\frac{11}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}}$

$\frac{3}{9}<\frac{3}{7}<\frac{3}{6}$　つまり　$\frac{1}{3}<\frac{3}{7}<\frac{1}{2}$　なので、$\frac{3}{7}$を超えない最大の単位分数は$\frac{1}{3}$です。

$\frac{3}{7}$から$\frac{1}{3}$を引くと$\frac{3}{7}-\frac{1}{3}=\frac{9}{21}-\frac{7}{21}=\frac{2}{21}$　となるので、$\frac{3}{7}=\frac{1}{3}+\frac{2}{21}$　と書けます。

$\frac{2}{22}<\frac{2}{21}<\frac{2}{20}$ つまり $\frac{1}{11}<\frac{2}{21}<\frac{1}{10}$ なので、$\frac{2}{21}$ を超えない最大の単位分数は $\frac{1}{11}$ です。

$\frac{2}{21}$ から $\frac{1}{11}$ を引くと $\frac{2}{21}-\frac{1}{11}=\frac{22}{231}-\frac{21}{231}=\frac{1}{231}$ となるので、$\frac{2}{21}=\frac{1}{11}+\frac{1}{231}$ と書けます。

以上より、$\boxed{\frac{3}{7}=\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{231}}$

問3.4

(1) 2 以上の自然数 n に対し、$\frac{1}{n}$ より小さい単位分数のうち最大のものは

もちろん $\frac{1}{n+1}$ です。

$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ なので $\boxed{\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}$　　$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ なので $\boxed{\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}}$

$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$ なので $\boxed{\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}}$　　$\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$ なので $\boxed{\frac{1}{5}=\frac{1}{6}+\frac{1}{30}}$

(2) (1)の結果から一般に、$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$ が成り立つことが予想できます。

実際に、

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$$

となるので、上の予想は正しいことがわかります。

(3) 2 以上の自然数 n について、$\frac{1}{n}$ をいくつかの異なる単位分数の和で表す方法が無限にあることを説明しましょう。

(2)より $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$ が成り立つので、$\frac{1}{n}$ をいくつかの異なる単位分数の和で表す方法は少なくとも 1 通りはあります。

$\frac{1}{n}$ がいくつかの異なる単位分数 $\frac{1}{a}$, $\cdots$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ を用いて、

$\frac{1}{n}=\frac{1}{a}+\cdots+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ （$a<\cdots<b<c$）と表せているとすると、

(2)より $\frac{1}{c}=\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c(c+1)}$ が成り立つので、

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{a}+\cdots+\frac{1}{b}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c(c+1)} \quad \ldots①$$ とも表せることになります。

これより、$\frac{1}{n}$ をいくつかの異なる単位分数の和で表す方法が 1 つあれば、それをもとに新たな表し方を作ることができます。

しかも、$a<\cdots<b<c<c+1<c(c+1)$ なので、①の右辺に現れるどの 2 つの単位分数も異なっています。したがって、この作業を繰り返せば、$\frac{1}{n}$ をいくつかの異なる単位分数の和で表す方法を無限に作ることができます。

問3.5

(1) $\frac{a}{b}-\frac{1}{n}=\frac{an}{bn}-\frac{b}{bn}=\boxed{\frac{an-b}{bn}}$

(2) ☆の操作後の分子 $an-b$ が操作前の分子 a より小さくなることを説明します。

$\frac{a}{b}<\frac{1}{n-1}$ なので $\frac{a}{b}\times b(n-1)<\frac{1}{n-1}\times b(n-1)$ つまり $a(n-1)<b$ となります。

これより

$an-a<b$

$an<a+b$

$an-b<a$

を得ます。

(3) (2)より☆の操作を繰り返すごとに分子は小さくなりますが、何回操作を繰り返しても分子は必ず自然数なので、☆の操作を何回か繰り返せば、必ず分子は 1 になり、このとき得られた分数は単位分数となります。

(4) 1 より小さい分数 $\frac{a}{b}$ が単位分数なら問 3.4 で見たようにいくつかの異なる単位分数の和で表せます。$\frac{a}{b}$ が単位分数でない場合は、☆の操作を何回か繰り返すことで単位分数が得られるので、この場合も $\frac{a}{b}$ をいくつかの異なる単位分数の和で表すことができます。(<u>☆の操作を繰り返す際に、引く単位分数はどんどん小さくなる</u>ため、現れる単位分数はどの 2 つも異なります。下線部の理由を考えてみよう。)

以上より、1 より小さいどんな分数 $\frac{a}{b}$ もいくつかの異なる単位分数の和で表せます。