中1数学B　2019年度春期講習　文字式とその応用
§4　数列

※　欠席してしまった場合は、問 4.1, 問 4.2 を確認し、p.30,31 の宿題 H4.1〜H4.3 に取り組んで提出して下さい。余裕があれば全問解きましょう。

問4.1

(1)

$$\begin{array}{rrcccccccccccc} & S(100) & = & \boxed{1} & + & \boxed{2} & + & \boxed{3} & + & \cdots & + & \boxed{99} & + & \boxed{100} \\ +) & S(100) & = & \boxed{100} & + & \boxed{99} & + & \boxed{98} & + & \cdots & + & \boxed{2} & + & \boxed{1} \\ \hline & 2\times S(100) & = & \boxed{101} & + & \boxed{101} & + & \boxed{101} & + & \cdots & + & \boxed{101} & + & \boxed{101} \end{array}$$

より、$2\times S(100)=101\times 100$ となるので、$S(100)=\boxed{5050}$

(2)

$$\begin{array}{rrcccccccccccc} & S(n) & = & \boxed{1} & + & \boxed{2} & + & \boxed{3} & + & \cdots & + & \boxed{(n-1)} & + & \boxed{n} \\ +) & S(n) & = & \boxed{n} & + & \boxed{(n-1)} & + & \boxed{(n-2)} & + & \cdots & + & \boxed{2} & + & \boxed{1} \\ \hline & 2\times S(n) & = & \boxed{(n+1)} & + & \boxed{(n+1)} & + & \boxed{(n+1)} & + & \cdots & + & \boxed{(n+1)} & + & \boxed{(n+1)} \end{array}$$

より、$2\times S(n)=(n+1)\times n$ となるので、$S(n)=\boxed{\frac{1}{2}n(n+1)}$

(3)　(2)の結果に $n=1000$ を代入することで、$S(1000)=\frac{1}{2}\times 1000\times(1000+1)=\boxed{500500}$ と分かります。

(4)　(1),(2)と同様のことをしても求まりますが、ここではひと工夫してみます。
(2)の結果で、n を $n-1$ に取り替えることで、
$S(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)(n-1+1)=\boxed{\frac{1}{2}(n-1)n}$ と分かり、
n を $n+1$ に取り替えることで、
$S(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+1+1)=\boxed{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}$ と分かります。

（注）あるいは、$S(n-1)=S(n)-n$ や $S(n+1)=S(n)+(n+1)$ に注目して求めることもできます。

(5)

$$
\begin{aligned}
V(n) &= (3\times 1-2)+(3\times 2-2)+(3\times 3-2)+\cdots\cdots+(3\times n-2) \\
&= 3\times(1+2+3+\cdots\cdots+n)-(\underbrace{2+2+2+\cdots\cdots+2}_{n\text{ 個}}) \\
&= 3\times S(n)-2\times n \\
&= 3\times\frac{1}{2}n(n+1)-2n \qquad \text{((2)の結果より)} \\
&= \frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n-2n \\
&= \boxed{\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n}
\end{aligned}
$$

(別解)

$$
\begin{array}{rrcccccccccccc}
 & V(n) & = & \boxed{1} & + & \boxed{4} & + & \boxed{7} & + & \cdots & + & \boxed{(3n-5)} & + & \boxed{(3n-2)} \\
+) & V(n) & = & \boxed{(3n-2)} & + & \boxed{(3n-5)} & + & \boxed{(3n-8)} & + & \cdots & + & \boxed{4} & + & \boxed{1} \\
\hline
 & 2\times V(n) & = & \boxed{(3n-1)} & + & \boxed{(3n-1)} & + & \boxed{(3n-1)} & + & \cdots & + & \boxed{(3n-1)} & + & \boxed{(3n-1)}
\end{array}
$$

より、$2\times V(n)=(3n-1)\times n$ となるので、$V(n)=\boxed{\frac{1}{2}n(3n-1)}$

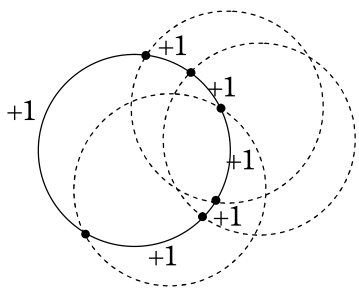
問4.2

(1) $\boxed{f(1)=2,\ f(2)=4,\ f(3)=8,\ f(4)=14}$

(2) (1)の結果を見ていると、

$\boxed{f(k+1)=f(k)+2k}$ ……………………………………………… ①

という関係が予想されます。このことをきちんと説明してみましょう。
平面上に条件を満たすように既に k 個の円が描かれており、$f(k)$ 個の領域に分割されているとしましょう。
ここに、条件を満たすように $k+1$ 個目の円を描くことを考えます。$k+1$ 個目の円は、既に描かれている k 個の円と 2 回ずつ交わるので、$2\times k$ 個の交点をもち、それらによって $2\times k$ 個の部分（円弧）に分けられます。その 1 つ 1 つが新しく領域を 1 つずつ増やすので、全部で $2\times k$ 個の領域が増えます。
したがって、$k+1$ 個目の円を描いた後の領域の個数 $f(k+1)$ と描く前の領域の個数 $f(k)$ を比べると $2\times k$ 個だけ増えるので、①が成り立つことが分かります。



-------- 既にある k 個の円

—— $k+1$ 個目の円

(3) ①を繰り返し利用すれば、

$$
\begin{aligned}
f(2) &= f(1)+2\times 1\\
f(3) &= f(2)+2\times 2 = f(1)+2\times 1+2\times 2\\
f(4) &= f(3)+2\times 3 = f(1)+2\times 1+2\times 2+2\times 3\\
&\ \vdots\\
f(n) &= f(1)+2\times 1+2\times 2+\cdots+2\times(n-1)\\
&= 2+2\times 1+2\times 2+\cdots+2\times(n-1)\\
&= 1+2(1+2+\cdots+(n-1))\\
&= 1+2\times\frac{1}{2}(n-1)n \quad \text{(問4.1(4)の結果より)}\\
&= \boxed{n^2-n+2}
\end{aligned}
$$

となります。

問4.3

対角線上の数は、1 番はじめの数が 41 で、その後 2, 4, 6, $\cdots$ と偶数を小さい順に足していくことで得られるので、対角線上の n 番目の数は、41 に 2 から $2(n-1)$ までを足した数、すなわち、

$$41+(2+4+6+\cdots+2(n-1))=41+2(1+2+3+\cdots+(n-1))=41+2\times\frac{1}{2}(n-1)n=41+(n-1)n$$

です（問 4.1 (4)の結果を利用しました）。これより、たとえば n=41 のときを考えれば、対角線上の $n=41$ 番目の数は、$41+(41-1)\times 41=41+40\times 41=(1+40)\times 41=41\times 41$ となり、素数にはなりません。よって、図の外側まで含めた対角線上の数がすべて素数になるわけではありません。