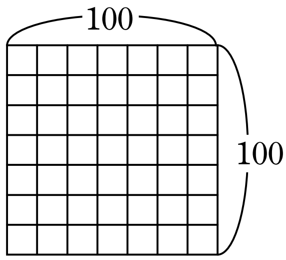
中1数学B　2019年度春期講習　文字式とその応用
§5　平方数の和

※　欠席してしまった場合は、本問およびチャレンジ問題の中で気になる問題に
　　取り組んでみよう。

問5.1



図の101本のタテ線を$l_1, l_2, \cdots, l_{101}$として、
101本のヨコ線を$m_1, m_2, \cdots, m_{101}$とします。
図の中にある1辺の長さがkの正方形
（kは100以下の自然数）は、
その辺を含むタテ線がどの2本なのかが
$101-k$通り（l_1とl_{k+1}，l_2とl_{k+2}，…，l_{101-k}とl_{101}）あり、
その辺を含むヨコ線がどの2本なのかが
$101-k$通り（m_1とm_{k+1}，m_2とm_{k+2}，…，m_{101-k}とm_{101}）
あることから、$(101-k)\times(101-k)$個あります。
したがって、
1辺の長さが1の正方形は100×100個あります。
1辺の長さが2の正方形は99×99個あります。
1辺の長さが3の正方形は98×98個あります。
……
1辺の長さが98の正方形は3×3個あります。
1辺の長さが99の正方形は2×2個あります。
1辺の長さが100の正方形は1×1個あります。
以上より、図の中に正方形は全部で
$1^2+2^2+3^2+\cdots+98^2+99^2+100^2$　個あるので、
あとはこれが計算することができれば解決です。
この計算が次の問5.2の目標となります。

問5.2

(1)

$$A(n) = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n \times (n+1)$$

の k 番目に足されている数は、

$k \times (k+1) = k^2 + k$

と表せます。よって、$A(n)$ は、

$$\begin{aligned} A(n) &= (\underline{1^2} + \underline{\underline{1}}) + (\underline{2^2} + \underline{\underline{2}}) + (\underline{3^2} + \underline{\underline{3}}) + \cdots + (\underline{n^2} + \underline{\underline{n}}) \\ &= \underline{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2} + \underline{\underline{1 + 2 + 3 + \cdots + n}} \\ &= S(n) + B(n) \end{aligned}$$

なので、$\boxed{A(n) = S(n) + B(n)}$ です。

(2) C5.3〜C5.5 のいずれかに取り組むことで、$A(n) = \dfrac{1}{3} n(n+1)(n+2)$ が成り立つことがわかります (C5.3〜C5.5 以外の方法もあるので、いろいろと考えてみましょう)。

このことと(1)より、

$$\begin{aligned} S(n) &= A(n) - B(n) \\ &= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= n(n+1) \times \frac{1}{3}(n+2) - n(n+1) \times \frac{1}{2} \\ &= n(n+1) \times \left(\frac{1}{3}(n+2) - \frac{1}{2} \right) \\ &= n(n+1) \times \frac{2(n+2) - 3}{6} \\ &= n(n+1) \times \frac{2n+1}{6} \\ &= \boxed{\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)} \end{aligned}$$

とわかります。

これより、問 5.1 の答えは、$S(100) = \dfrac{1}{6} \times 100 \times 101 \times 201 = 338350$ 個

とすんなり求まってしまいます。