中1数学A　2020年度春期講習　文字式とその応用
§4　大小の評価

※　欠席してしまった場合は、問 4.1, 問 4.2 を確認し、p.31 の宿題 H4.1〜H4.3 に取り組んで提出して下さい。余裕があれば全問解きましょう。

問4.1　文字はすべて正の数だとする。

(1) $\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{3}{3n+3}>\dfrac{3}{3n+4}$ なので、$\boxed{\dfrac{1}{n+1}\text{の方が大きい}}$。

ここで、$\boxed{a<b\text{ のとき }\dfrac{c}{a}>\dfrac{c}{b}}$ を用いた。

(2) $\dfrac{n}{2n+1}<\dfrac{n}{2n}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{n}{2n+2}<\dfrac{n}{2n}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{n}{2n+3}<\dfrac{n}{2n}=\dfrac{1}{2}$ なので、

$\dfrac{n}{2n+1}+\dfrac{n}{2n+2}+\dfrac{n}{2n+3}<\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$ である。

すなわち、$\boxed{\dfrac{3}{2}\text{の方が大きい}}$。

ここで、$\boxed{a<b\text{ かつ }c<d\text{ のとき }a+c<b+d}$ を用いた。

(3) $2^3=8, 3^2=9$ なので、$2^3<3^2\ldots$①

$5^3=125,\ 2^7=128$ なので、$5^3<2^7\ldots$②

①より、

$(2^3)^7<(3^2)^7$

$\underbrace{2^3\times2^3\times\cdots\times2^3}_{7\text{個}}<\underbrace{3^2\times3^2\times\cdots\times3^2}_{7\text{個}}$

$2^{3\times7}<3^{2\times7}$

$2^{21}<3^{14}\ldots$③

同様に②より、

$(5^3)^3<(2^7)^3$

$5^9<2^{21}\ldots$④

③,④より、

$5^9<3^{14}$　が成り立つ。

ここで、

$\boxed{a<b\text{ のとき }a^n<b^n\ (n\text{は自然数})}$

$\boxed{a<b\text{ かつ }b<c\text{ のとき }a<c}$

を用いた。

問4.2

(1) $\dfrac{11}{22}<\dfrac{11}{12}<\dfrac{11}{11}$ つまり $\dfrac{1}{2}<\dfrac{11}{12}<1$ なので、$\dfrac{11}{12}$ を超えない最大の単位分数は $\dfrac{1}{2}$ です。

$\dfrac{11}{12}$ から $\dfrac{1}{2}$ を引くと $\dfrac{11}{12}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{11}{12}-\dfrac{6}{12}=\dfrac{5}{12}$ となるので、$\dfrac{11}{12}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{12}$ と書けます。

$\dfrac{5}{15}<\dfrac{5}{12}<\dfrac{5}{10}$ つまり $\dfrac{1}{3}<\dfrac{5}{12}<\dfrac{1}{2}$ なので、$\dfrac{5}{12}$ を超えない最大の単位分数は $\dfrac{1}{3}$ です。

$\dfrac{5}{12}$ から $\dfrac{1}{3}$ を引くと $\dfrac{5}{12}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{12}-\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{12}$ となるので、$\dfrac{5}{12}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{12}$ と書けます。

以上より、$\boxed{\dfrac{11}{12}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{12}}$

$\dfrac{3}{9}<\dfrac{3}{7}<\dfrac{3}{6}$ つまり $\dfrac{1}{3}<\dfrac{3}{7}<\dfrac{1}{2}$ なので、$\dfrac{3}{7}$ を超えない最大の単位分数は $\dfrac{1}{3}$ です。

$\dfrac{3}{7}$ から $\dfrac{1}{3}$ を引くと $\dfrac{3}{7}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{9}{21}-\dfrac{7}{21}=\dfrac{2}{21}$ となるので、$\dfrac{3}{7}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{21}$ と書けます。

$\dfrac{2}{22}<\dfrac{2}{21}<\dfrac{2}{20}$ つまり $\dfrac{1}{11}<\dfrac{2}{21}<\dfrac{1}{10}$ なので、$\dfrac{2}{21}$ を超えない最大の単位分数は $\dfrac{1}{11}$ です。

$\dfrac{2}{21}$ から $\dfrac{1}{11}$ を引くと $\dfrac{2}{21}-\dfrac{1}{11}=\dfrac{22}{231}-\dfrac{21}{231}=\dfrac{1}{231}$ となるので、$\dfrac{2}{21}=\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{231}$ と書けます。

以上より、$\boxed{\dfrac{3}{7}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{231}}$

(2) $\dfrac{2}{4}<\dfrac{2}{3}<\dfrac{2}{2}$ なので、$\dfrac{2}{3}$ は $\dfrac{1}{2}$ と $\dfrac{1}{1}$ の間にある。

$\dfrac{2}{6}<\dfrac{2}{5}<\dfrac{2}{4}$ なので、$\dfrac{2}{5}$ は $\dfrac{1}{3}$ と $\dfrac{1}{2}$ の間にある。

$\dfrac{2}{8}<\dfrac{2}{7}<\dfrac{2}{6}$ なので、$\dfrac{2}{7}$ は $\dfrac{1}{4}$ と $\dfrac{1}{3}$ の間にある。

(3) (2)より、$\dfrac{2}{3}$ を超えない最大の単位分数は $\dfrac{1}{2}$ であり、

$\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{6}-\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{6}$ なので、$\boxed{\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}}$ と表せる。

(2)より、$\dfrac{2}{5}$ を超えない最大の単位分数は $\dfrac{1}{3}$ であり、

$\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{6}{15}-\dfrac{5}{15}=\dfrac{1}{15}$ なので、$\boxed{\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15}}$ と表せる。

(2)より、$\dfrac{2}{7}$ を超えない最大の単位分数は $\dfrac{1}{4}$ であり、

$\dfrac{2}{7}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{8}{28}-\dfrac{7}{28}=\dfrac{1}{28}$ なので、$\boxed{\dfrac{2}{7}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{28}}$ と表せる。

(4) $2n < 2n+1$ より $\dfrac{2}{2n+1} < \dfrac{2}{2n} = \dfrac{1}{n}$ です。

$2n+1 < 2n+2 = 2(n+1)$ より $\dfrac{2}{2n+1} > \dfrac{2}{2(n+1)} = \dfrac{1}{n+1}$ です。

以上より、$\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{2}{2n+1} < \dfrac{1}{n}$ です。

(5) (4)より、$\dfrac{2}{2n+1}$ を超えない最大の単位分数は $\dfrac{1}{n+1}$ なので、

$\dfrac{2}{2n+1}$ から $\dfrac{1}{n+1}$ を引いてみると、

$$\frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2(n+1)-(2n+1)}{(2n+1)(n+1)} = \frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(n+1)} = \frac{1}{(2n+1)(n+1)}$$

これより、

$\boxed{\dfrac{2}{2n+1} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{(2n+1)(n+1)}}$ と表せることがわかります。

問4.3

(1) 好き勝手に予想してみましょう。ちなみに、電卓で計算してみると、

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} = 2.45$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{10} = 2.92896\cdots$$

となります。

(2) $\dfrac{1}{4} > \dfrac{1}{6}$ なので $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4} > \dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6} = 2 = \dfrac{4}{2}$ ですが、

$\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{2}$ なので $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4} < \dfrac{2}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$ です。

よって、$\boxed{ア}$に入る最大の自然数は $\boxed{4}$ です。

(3) $\dfrac{1}{5} > \dfrac{1}{8}$, $\dfrac{1}{6} > \dfrac{1}{8}$, $\dfrac{1}{7} > \dfrac{1}{8}$ なので $\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8} > \dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2}$ です。

これと(2)でわかっている $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4} > \dfrac{4}{2}$ を合わせて、

$\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8} > \dfrac{4}{2}+\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$ を得ます。

よって、$\boxed{イ}$には $\boxed{5}$ が入ります。

(4) $\dfrac{1}{9}>\dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{10}>\dfrac{1}{16}, \cdots, \dfrac{1}{15}>\dfrac{1}{16}$ なので

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots\frac{1}{15}+\frac{1}{16}>\underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}}_{8\text{個}}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$$ です。

これと(3)でわかっている $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}>\dfrac{5}{2}$ を合わせて、

$\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\cdots+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{16}>\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{6}{2}$ を得ます。

よって、$\boxed{\text{ウ}}$には$\boxed{6}$が入ります。

(5) (3)では $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2^3}>\dfrac{5}{2}$ がわかっていて、それを利用して

(4)では $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2^4}>\dfrac{6}{2}$ を導きました。同じように、

$\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2^k}>\dfrac{k+2}{2}$ がわかっていれば、それと

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2\times2^k}>\underbrace{\frac{1}{2\times2^k}+\frac{1}{2\times2^k}+\cdots+\frac{1}{2\times2^k}}_{2^k\text{個}}=\frac{2^k}{2\times2^k}=\frac{1}{2}$$

を合わせることで

$\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2\times2^k}>\dfrac{k+2}{2}+\dfrac{1}{2}$ を、すなわち、

$\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2^{k+1}}>\dfrac{k+3}{2}$ を導くことができます。

この作業を繰り返すことで、一般に、$\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2^m}>\dfrac{m+2}{2}$ が成り立つことがわかります。これはどんな大きな自然数 m についても成り立つので、

$\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ の値は n を大きくしていくと$\boxed{\text{いくらでも大きくなる}}$ことがわかります。