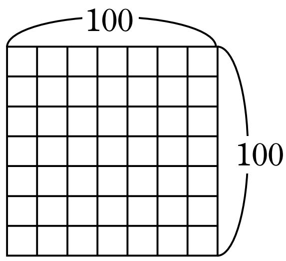
中1数学B　2020年度春期講習　文字式とその応用
§5　平方数の和

※　欠席してしまった場合は、本問およびチャレンジ問題の中で気になる問題に取り組んでみよう。

問5.1

図の 101 本のタテ線を $l_1, l_2, \cdots, l_{101}$ として、
101 本のヨコ線を $m_1, m_2, \cdots, m_{101}$ とします。
図の中にある 1 辺の長さが k の正方形
（k は 100 以下の自然数）は、
その辺を含むタテ線がどの 2 本なのかが
$101-k$ 通り（l_1とl_{k+1} ，l_2とl_{k+2} ，…，l_{101-k}とl_{101}）あり、
その辺を含むヨコ線がどの 2 本なのかが
$101-k$ 通り（m_1とm_{k+1} ，m_2とm_{k+2} ，…，m_{101-k}とm_{101}）
あることから、$(101-k)\times(101-k)$ 個あります。
したがって、
1 辺の長さが 1 の正方形は 100×100 個あります。
1 辺の長さが 2 の正方形は 99×99 個あります。
1 辺の長さが 3 の正方形は 98×98 個あります。
……
1 辺の長さが 98 の正方形は 3×3 個あります。
1 辺の長さが 99 の正方形は 2×2 個あります。
1 辺の長さが 100 の正方形は 1×1 個あります。
以上より、図の中に正方形は全部で
$1^2+2^2+3^2+\cdots+98^2+99^2+100^2$　個あるので、
あとはこれが計算することができれば解決です。
この計算が次の問 5.2 の目標となります。



問5.2

(1) $A(n) = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \cdots + n\times(n+1)$

の k 番目に足されている数は、

$k\times(k+1) = k^2 + k$

と表せます。よって、$A(n)$ は、

$$\begin{aligned}
A(n) &= (\underline{1^2} + \underline{\underline{1}}) + (\underline{2^2} + \underline{\underline{2}}) + (\underline{3^2} + \underline{\underline{3}}) + \cdots + (\underline{n^2} + \underline{\underline{n}}) \\
&= \underline{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2} + \underline{\underline{1 + 2 + 3 + \cdots + n}} \\
&= S(n) + B(n)
\end{aligned}$$

なので、$\boxed{A(n) = S(n) + B(n)}$ です。

(2) C5.3〜C5.5 のいずれかに取り組むことで、$A(n) = \dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ が成り立つことがわかります (C5.3〜C5.5 以外の方法もあるので、いろいろと考えてみましょう)。

このことと(1)より、

$$\begin{aligned}
S(n) &= A(n) - B(n) \\
&= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1) \\
&= n(n+1)\times\frac{1}{3}(n+2) - n(n+1)\times\frac{1}{2} \\
&= n(n+1)\times\left(\frac{1}{3}(n+2) - \frac{1}{2}\right) \\
&= n(n+1)\times\frac{2(n+2)-3}{6} \\
&= n(n+1)\times\frac{2n+1}{6} \\
&= \boxed{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}
\end{aligned}$$

とわかります。

これより、問 5.1 の答は、$S(100) = \dfrac{1}{6}\times 100\times 101\times 201 = 338350$ 個

とすんなり求まってしまいます。