

2019中1数学A 夏期前期 平面幾何入門 §4 合同条件 本問解答

※ 欠席してしまった場合は、問 4.1, 問 4.2, 問 4.3、および問 4.4 の下の囲みの合同条件を自分で確認し、p.43 の宿題 H4.3 に取り組んで提出してください。余裕があれば全問解きましょう。

問4.1

(1)

[結論] $a + b + c = 180^\circ$

[証明]

C を通り、AB に平行な直線 l を引く。

すなわち、

$l \parallel AB$ ①

図のように、 e, f をとる。

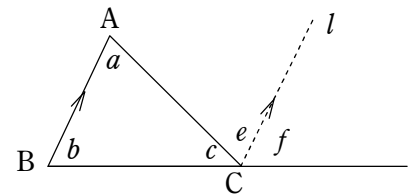
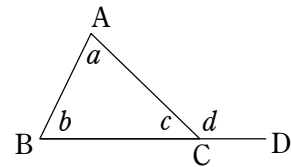
①より、 $a = e$ (錯角定理) ②

①より、 $b = f$ (同位角定理) ③

一方、 $e + f + c = 180^\circ$ (平角定理) ④

④に②③を代入して、

$a + b + c = 180^\circ$ (q.e.d.)



(2)

[結論] $a + b = d$

[証明]

②③より、 $a + b = e + f$ ⑤

一方、 $e + f = d$ ⑥

⑤⑥より、 $a + b = d$ (q.e.d.)

問4.2

[仮定] $\angle ABC = \angle ACB$ ①

[結論] $AB = AC$

[証明]

$\angle BAC$ の二等分線を引き、辺 BC との交点を D とすると、

$\angle BAD = \angle CAD$ ②

①②より、 $180^\circ - \angle ABC - \angle BAD = 180^\circ - \angle ACB - \angle CAD$ ③

③より、 $\angle ADB = \angle ADC$ (三角形の内角定理)④

$\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ において、

$AD = AD$ (共通)⑤

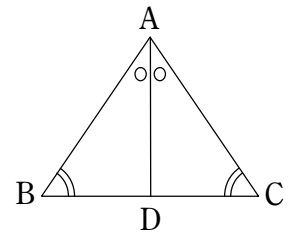
$\angle BAD = \angle CAD$ ②

$\angle ADB = \angle ADC$ ④

⑤②④より、

$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ (二角夾辺相等)⑥

⑥より、 $AB = AC$ (対応辺) (q.e.d.)



問4.3

図Iの $\angle BAC$ の二等分線ADが、AからBCへの中線、垂線でもあることを証明する。

[仮定] $AB = AC$ ① , $\angle BAD = \angle CAD$ ②

[結論] $BD = CD$, $AD \perp BC$

[証明]

$\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ において、

$AB = AC$ ①

$\angle BAD = \angle CAD$ ②

$AD = AD$ (共通) ③

①②③より、

$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ (二辺夾角相等) ④

よって、④より、 $BD = CD$ (対応辺) となり、
結論の一つが示された。

また、④より、 $\angle ADB = \angle ADC$ (対応角) ⑤

よって、⑤より、 $AD \perp BC$ となり、もう一つの結論も示された。

以上より、 $\angle BAC$ の2等分線、AからBCへの垂線、AからBCへの中線は一致することが示せた。
(q.e.d.)

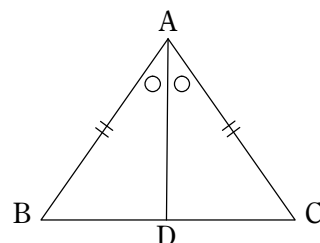


図 I

(注) 図IIにおいて、中線AMが、
 $\angle BAC$ の二等分線、AからBCへの垂線でもある
ことを証明してもよいです。

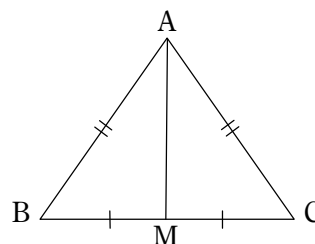


図 II

問4.4

$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ を AB と DE が重なるようにくっつければ二等辺三角形ができ、問4.3の結果が
使えそうです。「くっつける」という部分をきちんと書くと、次のような証明になります。

[仮定] $\angle BAC = \angle EDF = 90^\circ$ ①

$AB = DE$ ②

$BC = EF$ ③

[結論] $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

[証明] CA の A 側の延長上に

$PA = FD$ ④

となるような点 P をとる。すると、

$\angle BAP = \angle PAC - \angle BAC$ ⑤

で、 $\angle PAC = 180^\circ$ (平角定理) ⑥

だから、⑤⑥ より、

$\angle BAP = 90^\circ$ ⑦

$\triangle ABP$ と $\triangle DEF$ において、

$AB = DE$ ②

$PA = FD$ ④

①⑦より、 $\angle PAB = \angle FDE$ ⑧

②④⑧より、 $\triangle ABP \equiv \triangle DEF$ (二辺夾角相等) ⑨

⑨より、 $BP = EF$ (対応辺) ⑩

③⑩より、

$\triangle BCP$ は $BC = BP$ の二等辺三角形 ⑪

①⑦より、 $\angle BAC = \angle BAP = 90^\circ$ だから、 $\triangle BCP$ において、 BA は B から CP への垂線
である。このことと⑪より、 BA は B から CP への中線でもある(二等辺三角形の性質) から、

$AC = AP$ ⑫

$\triangle ABC$ と $\triangle ABP$ において、

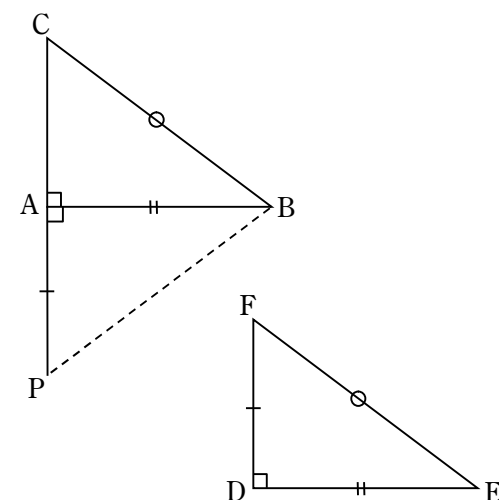
$BC = BP$ ⑪

$AB = AB$ (共通) ⑬

$AC = AP$ ⑫

⑪⑬⑫より、 $\triangle ABC \equiv \triangle ABP$ (三辺相等) ⑭

⑨⑭より、 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$



(q.e.d.)

(注) ⑫を導くところでは、 BA が $\angle PBC$ の二等分線でもあることより、 $\angle CBA = \angle PBA$ を導いてもよいです。すると⑭の合同は二辺夾角相等で示すことになります。