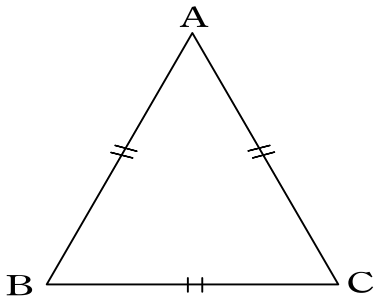
2019中1数学A　夏期前期　平面幾何入門§5　正三角形と正方形　本問解答

※　欠席してしまった場合は、問5.2を自分で確認してください。余裕があれば全問解きましょう。

問5.1

定理（正三角形の性質）
　正三角形のすべての内角は等しく、60° である。



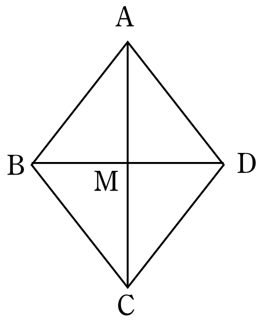
［仮定］AB＝AC＝BC　…………①
［結論］∠ABC＝∠ACB＝∠BAC＝60°
［証明］①より、AB＝AC なので、
∠ABC＝∠ACB　（底角定理）…………②
①より、AB＝BC なので、
∠ACB＝∠BAC　（底角定理）…………③
②③より、∠ABC＝∠ACB＝∠BAC　…………④
一方で、∠ABC＋∠ACB＋∠BAC＝180°　（内角定理）…………⑤
④を⑤に代入すると、∠ABC＋∠ABC＋∠ABC＝180°
これより、∠ABC＝60° がわかるので、これと④より、結論が示せた。　(q.e.d.)

問5.2

(1)　たとえば、次のような性質があります。証明してみましょう。

> **定理（ひし形の性質）：** ひし形において、以下の性質が成り立つ。
> (i)　平行四辺形である。
> (ii)　2本の対角線は直交する。
> (iii)　対角線は内角を2等分する。

ひし形ABCDを考え、その対角線の交点をMとする。



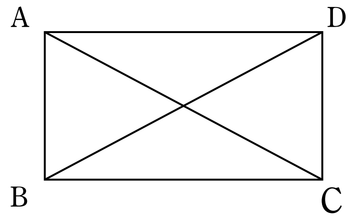
［仮定］ AB = BC = CD = DA ……………………………①
［結論］ 四角形ABCDは平行四辺形である
　　　ACとBDは直交する
　　　ACは∠BAD，∠BCD の二等分線である
　　　BDは∠ABC，∠ADC の二等分線である
［証明］
△ABCと△CDAにおいて、
①より、AB = CD ……………………………………②
①より、BC = DA ……………………………………③
また、　AC = CA（共通）……………………………④
②③④より、△ABC≡△CDA（ 三辺相等 ）………………………………⑤
⑤より∠BAC=∠DCA（ 対応角 ）なので、AB∥DC（ 錯角定理 ）………⑥
⑤より∠ACB=∠CAD（ 対応角 ）なので、BC∥AD（ 錯角定理 ）………⑦
⑥⑦より、四角形ABCDは平行四辺形であることが示せた。
これより、MはAC,BDの中点（ 平行四辺形の性質 ）…………………⑧
ここで、①より、△ABCは BA =BC の二等辺三角形であり、
⑧より、BMはBからACへの中線なので、BMはBからACへの垂線でもある。
よって、ACとBDは直交することが示せた。
また、BMは∠ABC の二等分線でもあり、同様に、二等辺三角形BCD , CDA , DAB
にも注目すると、CMは∠BCD の二等分線で、DMは∠CDA の二等分線で、
AMは∠DAB の二等分線であるので、示すべき結論が示せた。　(q.e.d.)

(2) たとえば、次のような性質があります。証明してみましょう。

定理(長方形の性質)： 長方形において、以下の性質が成り立つ。
(i) すべての内角は$90°$である。
(ii) 平行四辺形である。
(iii) 2本の対角線の長さは等しい。

長方形ABCDを考える。

［仮定］ $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$ ……………………………①
［結論］ $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$
四角形ABCDは平行四辺形である
$AC = DB$
［証明］
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$ （ 四角形の内角定理 ） であり、これに①を代入すると、
$\angle A + \angle A + \angle A + \angle A = 360°$ となるので、これより、$\angle A = 90°$ を得る。
これと①より、$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$ ……………………………②
が示せた。また、②より、
$\angle A + \angle B = 180°$ だから、$AD /\!/ BC$ （ 同側内角定理 ） ………………③
$\angle A + \angle D = 180°$ だから、$AB /\!/ DC$ （ 同側内角定理 ） ………………④
③④より、四角形ABCDは平行四辺形であることが示せた。
△ABCと△DCBにおいて、



$BC = CB$ （ 共通 ） ……………………………⑤
また、 $AB = DC$ （ 平行四辺形の性質 ） …………⑥
①より、$\angle ABC = \angle DCB$ ……………………………⑦
⑤⑥⑦より、$\triangle ABC \equiv \triangle DCB$ （ 二辺夾角相等 ）
これより、$AC=DB$ （ 対応辺 ） が示せた。 (q.e.d.)

(3) 正方形の性質をまとめると、次のようになります。

定理(正方形の性質)： 正方形において、以下の性質が成り立つ。
(i) すべての内角は$90°$である。
(ii) 平行四辺形である。
(iii) 2本の対角線は、長さが等しく、直交する。
(iv) 対角線は内角を2等分する。