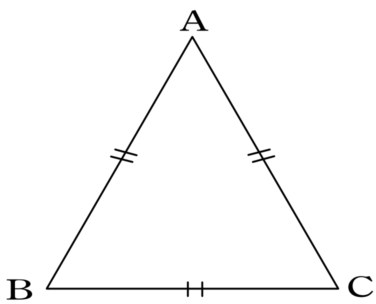
中1数学　2019年夏期講習　平面幾何入門B　本問解答
§5　正三角形と正方形

※　欠席してしまった場合は、問 5.1, 問 5.2 を自分で確認してください。

問5.1

定理（正三角形の性質）
正三角形のすべての内角は等しく、60° である。



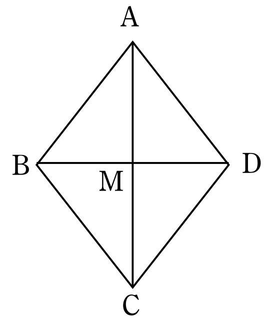
［仮定］ $AB = AC = BC$ ……………………………… ①
［結論］ $\angle ABC = \angle ACB = \angle BAC = 60°$
［証明］ ①より、$AB = AC$ なので、
$\angle ABC = \angle ACB$ （ 底角定理 ）……………… ②
①より、$AB = BC$ なので、
$\angle ACB = \angle BAC$ （ 底角定理 ）……………… ③
②③より、$\angle ABC = \angle ACB = \angle BAC$ ……………………………… ④
一方で、$\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180°$ （ 内角定理 ）……………… ⑤
④を⑤に代入すると、$\angle ABC + \angle ABC + \angle ABC = 180°$
これより、$\angle ABC = 60°$ がわかるので、これと④より、結論が示せた。 (q.e.d.)

問5.2

(1)　たとえば、次のような性質があります。証明してみましょう。

> **定理（ひし形の性質）：** ひし形において、以下の性質が成り立つ。
> (i)　平行四辺形である。
> (ii)　2 本の対角線は直交する。
> (iii)　対角線は内角を 2 等分する。

ひし形 ABCD を考え、その対角線の交点を M とする。



［仮定］ AB = BC = CD = DA ……………………①

［結論］ 四角形 ABCD は平行四辺形である
AC と BD は直交する
AC は∠BAD，∠BCD の二等分線である
BD は∠ABC，∠ADC の二等分線である

［証明］

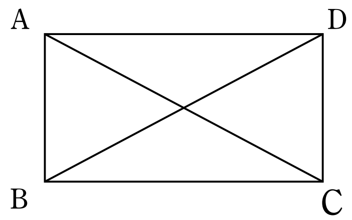
△ABC と△CDA において、
①より、AB = CD ……………………②
①より、BC = DA ……………………③
また、　AC = CA（共通）……………………④
②③④より、△ABC≡△CDA（ 三辺相等 ）……………………⑤
⑤より∠BAC=∠DCA（ 対応角 ）なので、AB∥DC（ 錯角定理 ）……………………⑥
⑤より∠ACB=∠CAD（ 対応角 ）なので、BC∥AD（ 錯角定理 ）……………………⑦
⑥⑦より、四角形 ABCD は平行四辺形であることが示せた。
これより、M は AC,BD の中点（ 平行四辺形の性質 ）……………………⑧
ここで、①より、△ABC は BA =BC の二等辺三角形であり、
⑧より、BM は B から AC への中線なので、BM は B から AC への垂線でもある。
よって、AC と BD は直交することが示せた。
また、BM は∠ABC の二等分線でもあり、同様に、二等辺三角形 BCD , CDA , DAB
にも注目すると、CM は∠BCD の二等分線で、DM は∠CDA の二等分線で、
AM は∠DAB の二等分線であるので、示すべき結論が示せた。　(q.e.d.)

(2) たとえば、次のような性質があります。証明してみましょう。

定理（長方形の性質）： 長方形において、以下の性質が成り立つ。
(i) すべての内角は90° である。
(ii) 平行四辺形である。
(iii) 2 本の対角線の長さは等しい。

長方形 ABCD を考える。

［仮定］ $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$ ……………………………… ①
［結論］ $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$
四角形 ABCD は平行四辺形である
$AC = DB$
［証明］
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$ （ 四角形の内角定理 ） であり、これに①を代入すると、
$\angle A + \angle A + \angle A + \angle A = 360°$ となるので、これより、$\angle A = 90°$ を得る。
これと①より、$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$ ……………………………………②
が示せた。また、②より、
$\angle A + \angle B = 180°$ だから、$AD /\!/ BC$ （ 同側内角定理 ） ………………………③
$\angle A + \angle D = 180°$ だから、$AB /\!/ DC$ （ 同側内角定理 ） ………………………④
③④より、四角形 ABCD は平行四辺形であることが示せた。
△ABC と△DCB において、
$BC = CB$ （ 共通 ） ……………………………………⑤
また、 $AB = DC$ （ 平行四辺形の性質 ） …………⑥
①より、$\angle ABC = \angle DCB$ ……………………………………⑦
⑤⑥⑦より、$\triangle ABC \equiv \triangle DCB$ （ 二辺夾角相等 ）
これより、$AC=DB$ （ 対応辺 ） が示せた。 (q.e.d.)



(3) 正方形の性質をまとめると、次のようになります。

定理（正方形の性質）： 正方形において、以下の性質が成り立つ。
(i) すべての内角は90° である。
(ii) 平行四辺形である。
(iii) 2 本の対角線は、長さが等しく、直交する。
(iv) 対角線は内角を 2 等分する。