

中1数学 2019年度 夏期講習 合同とその応用A 本問解答

§3 合同をみつけよう

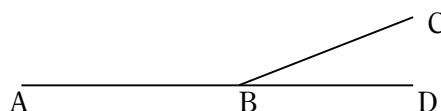
※ 欠席してしまった場合は、問 3.1, 問 3.3 を自分で確認し、p.21 の宿題 H3.1, H3.2 に取り組んで提出してください。余裕があれば全問解きましょう。

問3.1

[仮定]
 $\angle ABC = 180^\circ$ ①

[結論] A, B, C は一直線上

[証明]
A, B, C が一直線上にないと仮定すると、
A, B, D がこの順に一直線上 ②
にあるような点 D で、
 $\angle CBD \neq 0^\circ$ ③



となるものがとれる。
②より、 $\angle ABD = 180^\circ$ (平角定理) ④
①④より、 $\angle CBD = \angle ABD - \angle ABC = 180^\circ - 180^\circ = 0^\circ$
これは③に矛盾する。
よって、A, B, C は一直線上であることが示せた。

(q.e.d.)

(注) ここで証明したことがらも「平角定理」と呼びます。

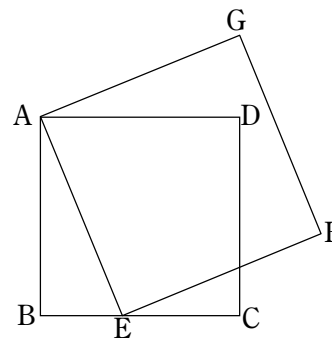
問3.2

[仮定]

ABCD は正方形①

AEFG は正方形.....②

[結論] C, D, G は一直線上



[方針]

C, D, G が一直線上にあることを言うには、問 3.1 より $\angle CDG = 180^\circ$ であることを言えばよいです。
 $\angle ADG = 90^\circ$ を言うには、 $\triangle ABE \cong \triangle ADG$ に注目しましょう。

[証明]

$\triangle ABE$ と $\triangle ADG$ において

①より $AB = AD$ ③

②より $AE = AG$ ④

また $\angle BAE = \angle BAD - \angle EAD$
 $= 90^\circ - \angle EAD$ (①より)⑤

$\angle DAG = \angle EAG - \angle EAD$
 $= 90^\circ - \angle EAD$ (②より)⑥

⑤⑥より $\angle BAE = \angle DAG$ ⑦

③④⑦より $\triangle ABE \cong \triangle ADG$ (二辺夾角相等)⑧

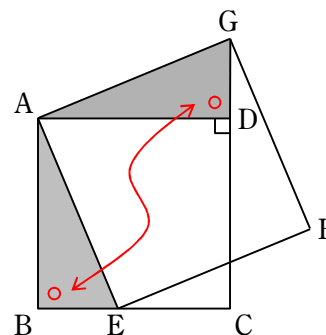
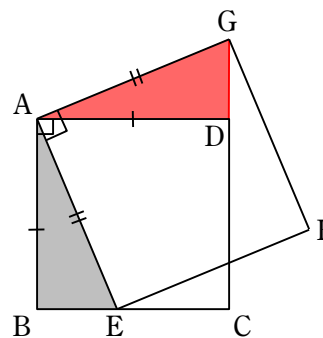
⑧より $\angle ABE = \angle ADG$ (合同の対応角)⑨

よって、 $\angle CDG = \angle CDA + \angle ADG$
 $= \angle CDA + \angle ABE$ (⑨より)
 $= 90^\circ + 90^\circ$ (①より)

$\therefore \angle CDG = 180^\circ$

よって C, D, G は一直線上 (平角定理)

(q.e.d.)



問3.3

- [仮定] $ABCD$ は長方形①
 $BM=CM$ ②
 $\angle BAM = \angle EAM$ ③

[結論] $AE=AB+CE$

[方針]

M から AE に垂線 MH を下ろすことで合同な三角形を作り出しましょう。すると、
 $\triangle ABM \equiv \triangle AHM$ より、 $AB=AH$ (合同の対応辺) なので、 $CE=HE$ を示せばよいです。
 そのためには、 $\triangle ECM \equiv \triangle EHM$ を証明すればよいです。

[証明]

M から AE に垂線 MH を下ろすと、

$$MH \perp AE \dots\dots\dots ④$$

$\triangle ABM$ と $\triangle AHM$ において

$$\textcircled{3} \text{より、} \angle BAM = \angle HAM \dots\dots\dots \textcircled{3}'$$

$$AM = AM \text{ (共通)} \dots\dots\dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{4} \text{より、} \angle ABM = \angle AHM (= 90^\circ) \dots\dots\dots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{3}'\textcircled{5}\textcircled{6} \text{より } \triangle ABM \equiv \triangle AHM \text{ (二角一对辺相等)} \dots\dots \textcircled{7}$$

$\triangle ECM$ と $\triangle EHM$ において

$$\textcircled{7} \text{より、} BM = HM \text{ (合同の対応辺)} \dots\dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{2}\textcircled{8} \text{より、} CM = HM \dots\dots\dots \textcircled{9}$$

$$EM = EM \text{ (共通)} \dots\dots\dots \textcircled{10}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{4} \text{より、} \angle ECM = \angle EHM = 90^\circ \dots\dots\dots \textcircled{11}$$

$$\textcircled{9}\textcircled{10}\textcircled{11} \text{より } \triangle ECM \equiv \triangle EHM \text{ (斜辺一辺相等)} \dots\dots \textcircled{12}$$

$$AE = AH + HE$$

$$= AB + CE \text{ (}\textcircled{7}\textcircled{12} \text{より、合同の対応辺)}$$

(q.e.d.)

(別方針)

AM と DC の交点を F とすると、

$\triangle ABM \equiv \triangle FCM$ が示せます。

すると、対応辺で $AB=FC$ なので、

$AB+CE=FE$ となり、 $AE=FE$ を示せばよいです。

が、それはすぐに分かりますね。

