

中1数学 2019年度 夏期講習 合同とその応用A 本問解答

§4 平行四辺形条件を使いこなそう

※ 欠席してしまった場合は、問 4.1, 問 4.2 を自分で確認し、p.25 の宿題 H4.1, H4.2 に取り組んで提出してください。余裕があれば全問解きましょう。

問4.1

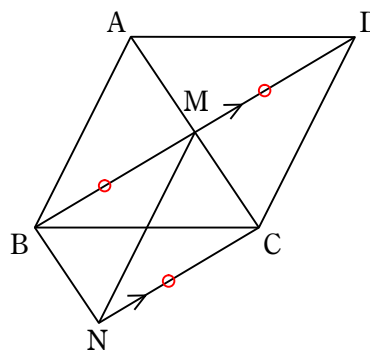
[仮定]

ABCD は平行四辺形①

BMCN は平行四辺形②

[結論]

CDMN は平行四辺形



[方針]

四角形が平行四辺形であることを証明したいなら、まずは平行な辺があるかどうかを確認するのは自然なことです。1組の平行な辺が見つかったら、他方も平行かどうか調べ、それがよく分からない場合には、最初に見つけた平行な2辺が等しいかどうかを考えてみるのが妥当でしょう。

[証明]

②より $BM \parallel NC$
 $\therefore MD \parallel NC$ ③

①より $MD = BM$ ④

②より $BM = NC$ ⑤

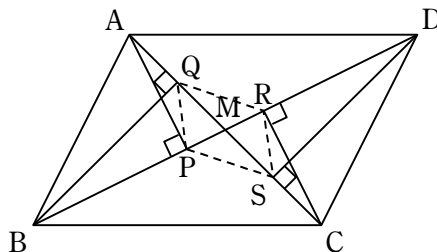
④⑤より $MD = NC$ ⑥

③⑥より、1組の向かい合う辺が平行かつ等しいので
 CDMN は平行四辺形 (q.e.d.)

問4.2

[仮定]

- ABCD は平行四辺形①
 $AP \perp BD$ ②
 $BQ \perp AC$ ③
 $CR \perp BD$ ④
 $DS \perp AC$ ⑤



(1)

[結論] $\triangle AMP \equiv \triangle CMR$

[証明]

$\triangle AMP$ と $\triangle CMR$ において

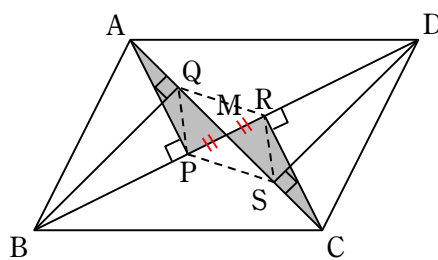
$\angle AMP = \angle CMR$ (対頂角定理)⑥

②④より $\angle APM = \angle CRM (=90^\circ)$ ⑦

①より $AM = CM$ ⑧

⑥⑦⑧より $\triangle AMP \equiv \triangle CMR$ (二角一对辺相等)⑨

(q.e.d.)



(2)

[結論] PQRS は平行四辺形

[方針]

平行四辺形と言いたい四角形の4辺は扱いにくい場所にありますが、対角線はもとの平行四辺形の対角線上にあります。対角線が互いに他を2等分していることを証明する方針が妥当でしょう。

[証明]

⑨より $PM = RM$ (合同の対応辺)⑩

(1)と同様に、 $\triangle BMQ$ と $\triangle DMS$ において

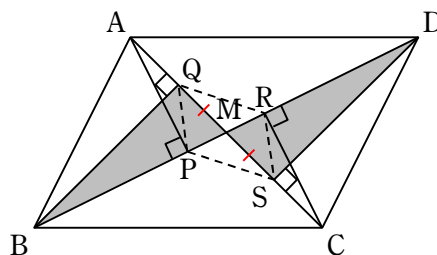
$\angle BMQ = \angle DMS$ (対頂角定理)⑪

③⑤より $\angle BQM = \angle DSM (=90^\circ)$ ⑫

①より $BM = DM$ ⑬

⑪⑫⑬より $\triangle BMQ \equiv \triangle DMS$ (二角一对辺相等)⑭

⑭より $QM = SM$ (合同の対応辺)⑮



⑩⑮より、対角線が互いに他を2等分するので

PQRS は平行四辺形

(q.e.d.)

問4.3

[仮定]

$\triangle PAB$ は正三角形 ①

$\triangle QBC$ は正三角形 ②

$\triangle RCA$ は正三角形 ③

[結論]

$APQR$ は平行四辺形

[証明]

$\triangle BPQ$ と $\triangle BAC$ において

①より $BP = BA$ ④

②より $BQ = BC$ ⑤

また $\angle PBQ = \angle PBA - \angle QBA$
 $= 60^\circ - \angle QBA$ (①より) ⑥

$\angle ABC = \angle QBC - \angle QBA$
 $= 60^\circ - \angle QBA$ (②より) ⑦

⑥⑦より $\angle PBQ = \angle ABC$ ⑧

④⑤⑧より $\triangle BPQ \equiv \triangle BAC$ (二辺夾角相等) ⑨

⑨より $PQ = AC$ (合同の対応辺) ⑩

③より $AC = AR$ ⑪

⑩⑪より $PQ = AR$ ⑫

同様に、 $\triangle QRC$ と $\triangle BAC$ において

③より $CR = CA$ ⑬

②より $CQ = CB$ ⑭

また $\angle RCQ = \angle RCA - \angle QCA$
 $= 60^\circ - \angle QCA$ (③より) ⑮

$\angle ACB = \angle QCB - \angle QCA$
 $= 60^\circ - \angle QCA$ (②より) ⑯

⑮⑯より $\angle RCQ = \angle ACB$ ⑰

⑬⑭⑰より $\triangle QRC \equiv \triangle BAC$ (二辺夾角相等) ⑱

⑱より $RQ = AB$ (合同の対応辺) ⑲

①より $AB = AP$ ⑳

⑲⑳より $RQ = AP$ ㉑

⑫㉑より、2組の向かい合う辺が等しいので

$APQR$ は平行四辺形

(q.e.d.)

上の方針は単純ですが、二度目の合同を示さずとも、⑫以降を次のようにして⑨の合同のみで証明することもできます。

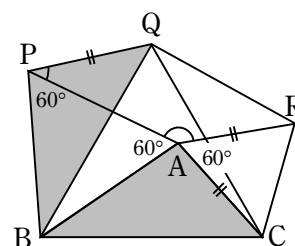
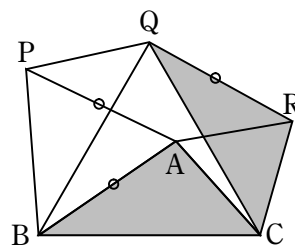
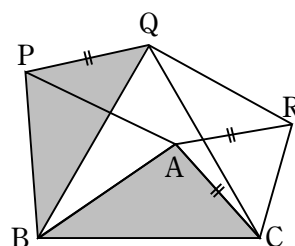
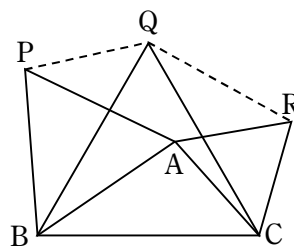
[証明]

(⑫までは上の証明と同じ。番号は⑬から振り直しています)

⑨より $\angle QPB = \angle CAB$ (合同の対応角) ⑬

すると $\angle APQ = \angle QPB - \angle APB$
 $= \angle QPB - 60^\circ$ (①より) ⑭

$\angle PAR = 360^\circ - \angle PAB - \angle CAB - \angle RAC$
 $= 360^\circ - 60^\circ - \angle CAB - 60^\circ$ (①③より)
 $= 240^\circ - \angle CAB$ ⑮



$$\begin{aligned} \textcircled{14}\textcircled{15} \text{より} \quad \angle APQ + \angle PAR &= \angle QPB - 60^\circ + 240^\circ - \angle CAB \\ &= 180^\circ + \angle QPB - \angle CAB \end{aligned}$$

$$\therefore \angle APQ + \angle PAR = 180^\circ \quad (\textcircled{13} \text{より}) \quad \dots\dots \textcircled{16}$$

$$\textcircled{16} \text{より} \quad PQ \parallel AR \quad (\text{同側内角定理}) \quad \dots\dots\dots \textcircled{17}$$

⑫⑰より、1組の向かい合う辺が平行かつ等しいので
APQR は平行四辺形 (q.e.d.)