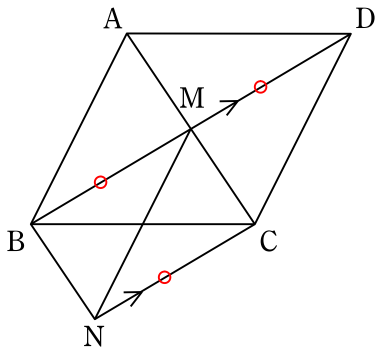
中1数学　2019年度　夏期講習　合同とその応用B　本問解答
§3　平行四辺形条件を使いこなそう

※　欠席してしまった場合は、問 3.2, 問 3.3 を自分で確認し、p.21 の宿題に取り組んで提出してください。余裕があれば全問解きましょう。

問3.1



［仮定］
ABCD は平行四辺形 ………………………………①
BMCN は平行四辺形 ………………………………②

［結論］
CDMN は平行四辺形

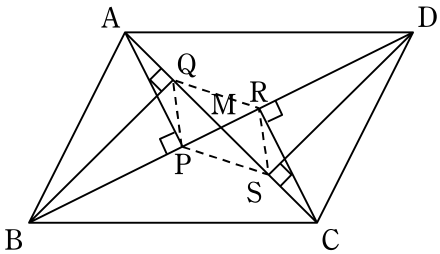
［方針］
四角形が平行四辺形であることを証明したいなら、まずは平行な辺があるかどうかを確認するのは自然なことです。1 組の平行な辺が見つかったら、他方も平行かどうか調べ、それがよく分からない場合には、最初に見つけた平行な 2 辺が等しいかどうかを考えてみるのが妥当でしょう。

［証明］
②より、　BM // NC
　　　∴　MD // NC ………………………………③

①より、　MD = BM ………………………………④
②より、　BM = NC ………………………………⑤
④⑤より、　MD = NC ………………………………⑥

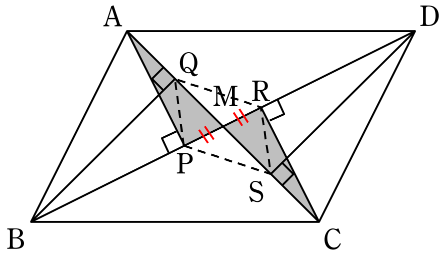
③⑥より、1 組の向かい合う辺が平行かつ等しいので、
　　　CDMN は平行四辺形　　　　　　(q.e.d.)

問3.2



［仮定］
ABCD は平行四辺形 ....①
AP ⊥ BD ....②
BQ ⊥ AC ....③
CR ⊥ BD ....④
DS ⊥ AC ....⑤

(1)
［結論］△AMP ≡ △CMR
［証明］
△AMP と△CMR において
∠AMP = ∠CMR （対頂角定理） ..... ⑥
②④より ∠APM = ∠CRM (=90°) .... ⑦
①より AM = CM .... ⑧
⑥⑦⑧より △AMP ≡ △CMR （二角一対辺相等） .... ⑨ (q.e.d.)

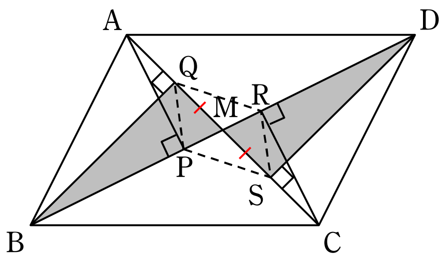


(2)
［結論］PQRS は平行四辺形

［方針］
平行四辺形と言いたい四角形の 4 辺は扱いにくい場所にありますが、対角線はもとの平行四辺形の対角線上にあります。対角線が互いに他を 2 等分していることを証明する方針が妥当でしょう。

［証明］
⑨より PM = RM （合同の対応辺） ....⑩

(1)と同様に、△BMQ と△DMS において
∠BMQ = ∠DMS （対頂角定理） .... ⑪
③⑤より ∠BQM = ∠DSM (=90°) .... ⑫
①より BM = DM .... ⑬
⑪⑫⑬より △BMQ ≡ △DMS （二角一対辺相等） .... ⑭
⑭より QM = SM （合同の対応辺） .... ⑮



⑩⑮より、対角線が互いに他を 2 等分するので
PQRS は平行四辺形 (q.e.d.)

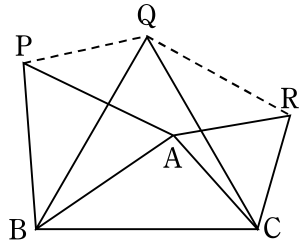
問3.3

［仮定］

△PAB は正三角形......................................①

△QBC は正三角形......................................②

△RAC は正三角形......................................③



［結論］

APQR は平行四辺形

［証明］

△BPQ と△BAC において、

①より、　BP = BA ....④

②より、　BQ = BC ....⑤

また、　∠PBQ = ∠PBA − ∠QBA

　　　　　= 60° − ∠QBA （①より）..........⑥

　　　∠ABC = ∠QBC − ∠QBA

　　　　　= 60° − ∠QBA （②より）..........⑦

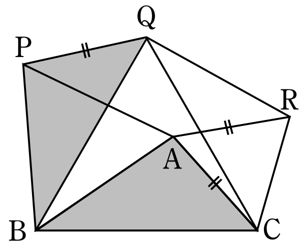
⑥⑦より、　∠PBQ = ∠ABC ....⑧

④⑤⑧より、△BPQ ≡ △BAC （二辺夾角相等）......⑨

⑨より、　PQ = AC （合同の対応辺）..................⑩

③より、　AC = AR ....⑪

⑩⑪より、　PQ = AR ....⑫



同様に、△QRC と△BAC において、

③より、　CR = CA ....⑬

②より、　CQ = CB ....⑭

また、　∠RCQ = ∠RCA − ∠QCA

　　　　　= 60° − ∠QCA （③より）..........⑮

　　　∠ACB = ∠QCB − ∠QCA

　　　　　= 60° − ∠QCA （②より）..........⑯

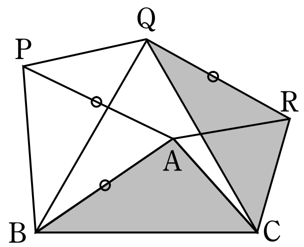
⑮⑯より、　∠RCQ = ∠ACB ....⑰

⑬⑭⑰より、△QRC ≡ △BAC （二辺夾角相等）.....⑱

⑱より、　RQ = AB （合同の対応辺）..................⑲

①より、　AB = AP ....⑳

⑲⑳より、　RQ = AP ....㉑



⑫㉑より、2 組の向かい合う辺が等しいので、

　　APQR は平行四辺形　　　　　　　　(q.e.d.)

この方針は単純ですが、二度目の合同を示さずとも、⑫以降を次のようにして⑨の合同のみで証明することもできます。

［証明］

（⑫までは上の証明と同じ。番号は⑬から振り直しています。）

⑨より、　$\angle QPB = \angle CAB$　（合同の対応角）.......⑬

すると、　$\angle APQ = \angle QPB - \angle APB$

$= \angle QPB - 60^\circ$　（①より）..........⑭

$\angle PAR = 360^\circ - \angle PAB - \angle CAB - \angle RAC$

$= 360^\circ - 60^\circ - \angle CAB - 60^\circ$　（①③より）

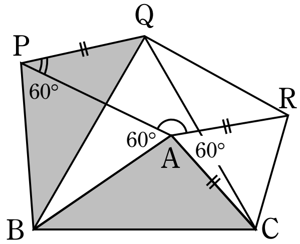
$= 240^\circ - \angle CAB$ ....⑮

⑭⑮より、　$\angle APQ + \angle PAR = \angle QPB - 60^\circ + 240^\circ - \angle CAB$

$= 180^\circ + \angle QPB - \angle CAB$

∴　$\angle APQ + \angle PAR = 180^\circ$　（⑬より）.........⑯

⑯より、　$PQ \,/\!/\, AR$　（同側内角定理）..................⑰

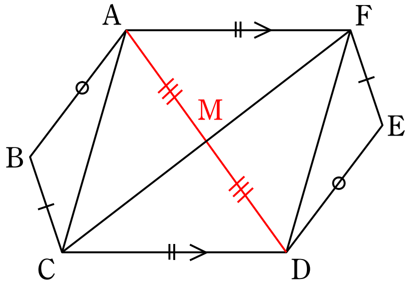


⑫⑰より、1 組の向かい合う辺が平行かつ等しいので、

APQR は平行四辺形　　　　　　　　　　　(q.e.d.)

問3.4

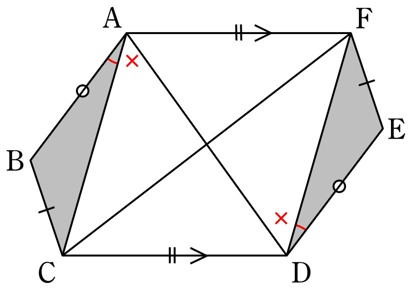
［仮定］
AB＝DE ……………………………………………①
BC＝EF ……………………………………………②
CD＝AF ……………………………………………③
CD // AF ……………………………………………④



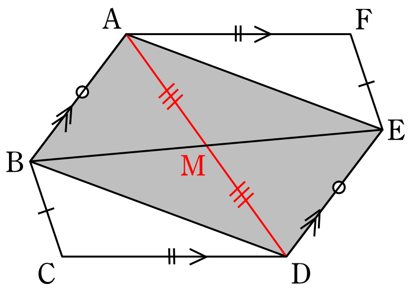
［結論］
AD, BE, CF は一点で交わる

［方針］
ACDF は平行四辺形なので、対角線 AD, CF は互いに他を 2 等分します。AD, BE, CF が一点で交わるということは、BE は AD と CF の交点、つまり AD の中点を通るということです。ABDE も平行四辺形であることが言えれば、対角線の BE, AD は互いに他を 2 等分するので、BE も AD の中点を通ることになります。

［証明］
③④より、1 組の向かい合う辺が平行かつ等しいので
ACDF は平行四辺形……………………⑤
⑤より、CF は AD と、AD の中点 M で交わる………⑥



⑤より AC // DF なので、
∠CAD＝∠FDA （錯角定理） ……………⑦
△ABC と△DEF において、
⑤より、 AC＝DF ……………………………………⑧
①②⑧より、 △ABC ≡ △DEF （三辺相等） …………⑨
⑨より、 ∠BAC＝∠EDF （合同の対応角） ……⑩
⑦⑩より、 ∠BAC＋∠CAD ＝∠EDF＋∠FDA
∴ ∠BAD＝∠EDA ……………………………⑪
⑪より、 AB // DE （錯角定理） ……………………⑫



①⑫より、1 組の向かい合う辺が平行かつ等しいので、
ABDE は平行四辺形……………………⑬
⑬より、BE は AD と、AD の中点 M で交わる ………⑭

⑥⑭より、 AD, BE, CF は一点 M で交わる (q.e.d.)