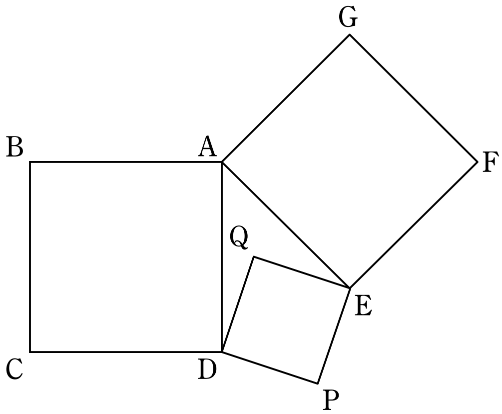
中1数学　2019年度　夏期講習　合同とその応用B　本問解答
§4　総合演習

※　欠席してしまった場合は、問 4.1, 問 4.2 を自分で確認し、p.25 の宿題に取り組んで提出してください。余裕があれば全問解きましょう。

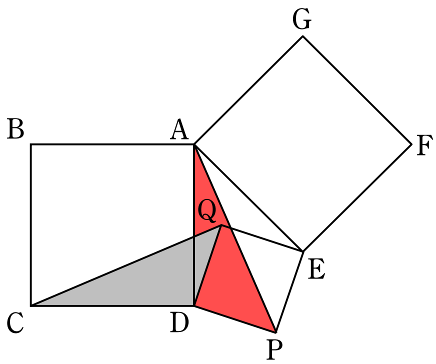
問4.1



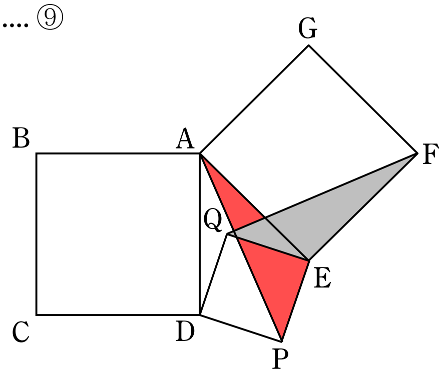
［仮定］
ABCD は正方形……①
AEFG は正方形……②
DPEQ は正方形……③

(1)　［結論］ CQ＝QF

［方針］
本問の難しいところは、CQ と QF が等しいことが、合同な三角形の対応辺になっていない点です。問題を見てまず注目するのは、おそらく△CDQ と△FEQ だと思いますが、これらの三角形は合同にはなりません（CD と FE の長さが同じとは書かれていないので、合同にはなりません)。
ところで、△CDQ と△EFQ には、それぞれ合同な三角形が隠れています。ここまで学んできた皆さんならば、それぞれの三角形に合同な三角形を見つけられるはずです。



［証明］
△CDQ と△ADP において、
①より　CD＝AD……④
③より　DQ＝DP……⑤
また　∠CDQ＝∠CDA＋∠ADQ
　　　＝90°＋∠ADQ（①より）……⑥
　　∠ADP＝∠ADQ＋∠QDP
　　　＝∠ADQ＋90°（③より）……⑦
⑥⑦より　∠CDQ＝∠ADP……⑧
④⑤⑧より　△CDQ≡△ADP（二辺夾角相等）……⑨
⑨より　CQ＝AP（対応辺）……⑩
△EFQ と△EAP において、
②より　FE＝AE……⑪
③より　EQ＝EP……⑫
また　∠FEQ＝∠FEA＋∠AEQ
　　　＝90°＋∠AEQ（②より）……⑬



$\angle \mathrm{AEP} = \angle \mathrm{AEQ} + \angle \mathrm{QEP}$

$= \angle \mathrm{AEQ} + 90^\circ$ （③より） ....⑭

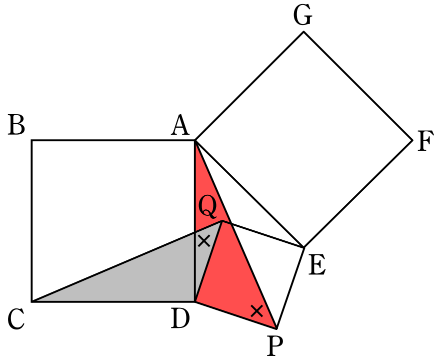
⑬⑭より　　$\angle \mathrm{FEQ} = \angle \mathrm{AEP}$ ....⑮

⑪⑫⑮より　$\triangle \mathrm{EFQ} \equiv \triangle \mathrm{EAP}$ （二辺夾角相等） .... ⑯

⑯より　　$\mathrm{FQ} = \mathrm{AP}$ （対応辺） ....⑰

⑩⑰より　　$\mathrm{CQ} = \mathrm{QF}$ ....⑱　　(q.e.d.)

(2)　［結論］Q は CF の中点



(1)で証明してあるじゃないか、と思うかもしれませんが、実は C, Q, F が一直線上にあることがまだ示されていません。

［証明］

⑨より　　$\angle \mathrm{CQD} = \angle \mathrm{APD}$ （対応角） ....⑲

⑯より　　$\angle \mathrm{FQE} = \angle \mathrm{APE}$ （対応角） ....⑳

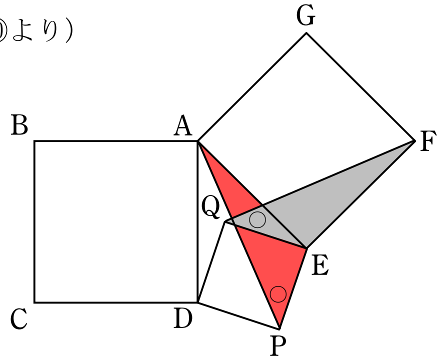
すると、　$\angle \mathrm{CQF} = \angle \mathrm{CQD} + \angle \mathrm{DQE} + \angle \mathrm{EQF}$

$= \underline{\angle \mathrm{APD}} + \angle \mathrm{DQE} + \underline{\angle \mathrm{APE}}$ （⑲⑳より）

$= \underline{\angle \mathrm{DPE}} + \angle \mathrm{DQE}$

$= 90^\circ + 90^\circ$ （③より）

$= 180^\circ$ ....㉑



㉑より　　C, Q, F は一直線上（平角定理） ......㉒

⑱㉒より　　Q は CF の中点

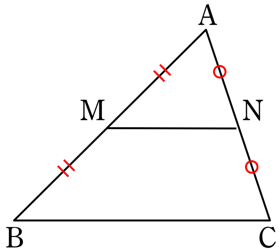
(q.e.d.)

問4.2

［仮定］

AM = BM ……………………………………………①

AN = CN ……………………………………………②

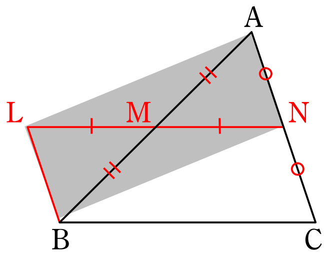


［結論］

MN // BC

$\mathrm{MN} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BC}$

［証明］



NM の M 側の延長上に

LM = NM ………………………………………… ③

となるように点 L をとる。

①③より、対角線が互いに他を 2 等分するので、

ANBL は平行四辺形 ……………………………… ④

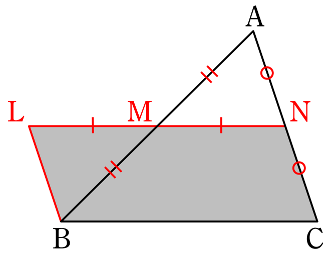
④より、 AC // LB ……………………………… ⑤

④より、AN = LB ……………………………… ⑥

②⑥より、CN = LB ……………………………… ⑦

⑤⑦より、1 組の向かい合う辺が平行かつ等しいので、

NCBL は平行四辺形 ……………………………… ⑧



⑧より、結論の一つである MN // BC は示せた。

また、⑧より、NL = BC ………………………… ⑨

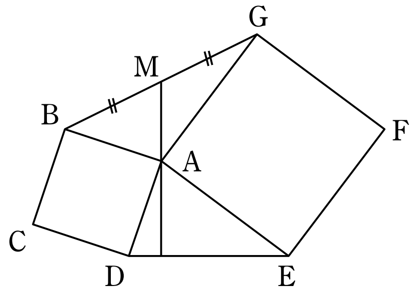
③より、 $\mathrm{MN} = \dfrac{1}{2}\mathrm{NL}$ ………………………… ⑩

⑨⑩より、もう一つの結論 $\mathrm{MN} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BC}$ も示せた。

(q.e.d.)

問4.3

［仮定］
ABCD は正方形 ....①
AEFG は正方形......................................②
BM = MG ....③



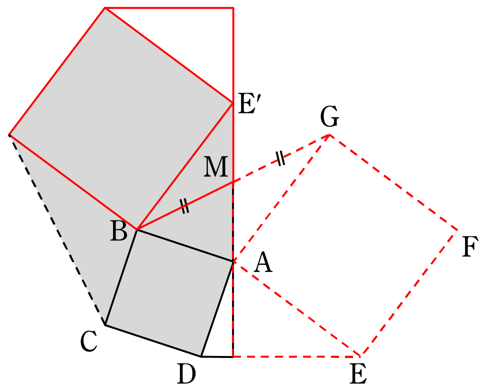
［結論］

$$\mathrm{MA} = \frac{1}{2}\mathrm{DE},\ \mathrm{MA} \perp \mathrm{DE}$$

［方針］
試行錯誤で AM より右側の部分を、GM と BM が重なるように M を中心に180° 回転移動した図（右図の赤線部分）や、はじめの図を ABCD の「中心」（対角線の交点）を中心として反時計回りに90° 回転した図（右図の灰色部分）を描いて結論の理由を探ってみると、この問題のポイントは

・ △ABE′ ≡ △DAE であること
・ ABE′G は平行四辺形であること

であることが見えてきます。
そこで問 4.2 同様、中線 AM を 2 倍に伸ばした平行四辺形を描いてみましょう。



［証明］

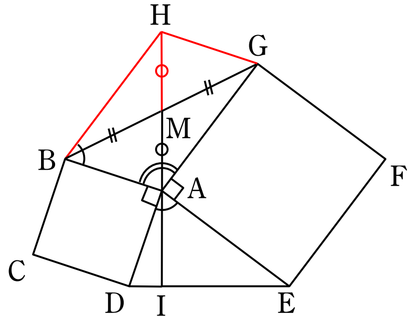
AM の M 側の延長上に、

$AM = MH$ ……④

となる点 H を取ると、

③④より、対角線が互いに他を 2 等分するので、

ABHG は平行四辺形 ……⑤



$\triangle ABH$ と $\triangle DAE$ において、

①より、　$AB = DA$ ……⑥

$BH = AG$ （⑤より）

$= AE$ （②より）

$\therefore$ $BH = AE$ ……⑦

⑤より、$BH \,//\, AG$ なので、

$\angle ABH = 180° - \angle BAG$ （同側内角定理） ….⑧

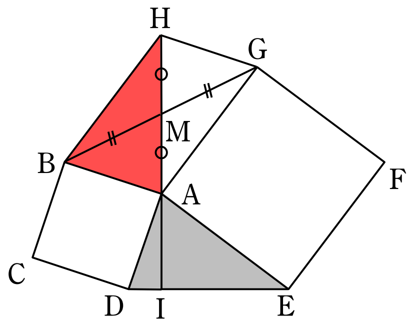
一方、　$\angle DAE = 360° - \angle BAD - \angle BAG - \angle GAE$

$= 360° - 90° - \angle BAG - 90°$ （①②より）

$= 180° - \angle BAG$ ……⑨

⑧⑨より、　$\angle ABH = \angle DAE$ ……⑩

⑥⑦⑩より、$\triangle ABH \equiv \triangle DAE$ （二辺夾角相等） ……⑪



⑪より、　$AH = DE$ （合同の対応辺） ……⑫

④⑫より、　$MA = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}DE$

となり、結論の一つが示せた。

また、　$\angle BAH = \angle ADE$ （合同の対応角） ……⑬

MA と DE の交点を I とおくと、

$\angle AIE = \angle DAI + \angle ADE$ （$\triangle ADI$ で外角定理）

$= \angle DAI + \angle BAH$ （⑬より）

$= 180° - \angle DAB$ （平角定理）

$= 180° - 90°$ （①より）

$= 90°$

よって、　$MA \perp DE$

となり、もう一つの結論も示せた。　(q.e.d.)