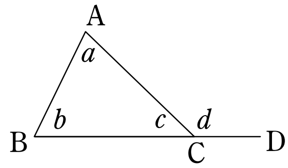
中1数学 2019年度 夏期講習 幾何ダイジェスト 本問解答
§3 平行線公理

※ 欠席してしまった場合は、問 3.1 〜 問 3.4 を自分で確認し、p.30,31 の宿題 H3.2 , H3.3 に取り組んで提出してください。余裕があれば全問解きましょう。

問3.1

(1)

[結論] $a+b+c=180^\circ$



[証明]

C を通り、AB に平行な直線 l を引く。

すなわち、

$l \parallel AB$ ……………………①

図のように、e, f をとる。

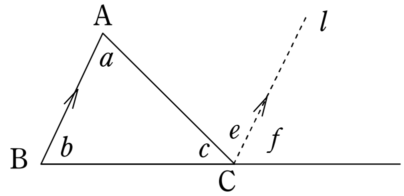
①より、 $a=e$ （ 錯角定理 ） ……………②

①より、 $b=f$ （ 同位角定理 ） ……………③

一方、 $e+f+c=180^\circ$ （ 平角定理 ） ……④

④に② ③を代入して、

$a+b+c=180^\circ$ (q.e.d.)



(2)

[結論] $a+b=d$

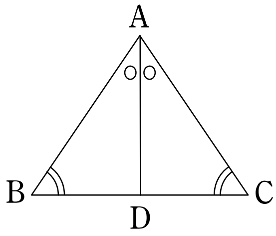
[証明]

② ③より、$a+b=e+f$ ……………………⑤

一方、 $e+f=d$ ……………………⑥

⑤ ⑥より、$a+b=d$ (q.e.d.)

問3.2



［仮定］$\angle ABC = \angle ACB$ ……………………………①

［結論］$AB = AC$

［証明］

$\angle BAC$ の二等分線を引き、辺 BC との交点を D とすると、

$\angle BAD = \angle CAD$ ……………………………②

① ②より、$180^\circ - \angle ABC - \angle BAD = 180^\circ - \angle ACB - \angle CAD$ ……③

③より、$\angle ADB = \angle ADC$ （ 三角形の内角定理 ）……④

$\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ において、

$AD = AD$ （ 共通 ）……………………………⑤

$\angle BAD = \angle CAD$ ……………………………②

$\angle ADB = \angle ADC$ ……………………………④

⑤②④より、

$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$（ 二角夾辺相等 ）……⑥

⑥より、$AB = AC$（ 対応辺 ） (q.e.d.)

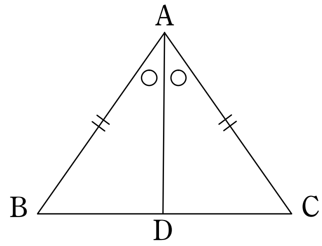
問3.3

$\angle BAC$の二等分線ADを引き、これがAからBCへの中線、垂線でもあることを証明する。

［仮定］$AB = AC$ ……… ①，$\angle BAD = \angle CAD$ ……… ②

［結論］$BD = CD$，$AD \perp BC$

［証明］



$\triangle ABD$と$\triangle ACD$において、

$AB = AC$ ……… ①

$\angle BAD = \angle CAD$ ……… ②

$AD = AD$（　共通　）…… ③

①②③より、

$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$（　二辺夾角相等　）…… ④

よって、④より、$BD = CD$（　対応辺　）となり、

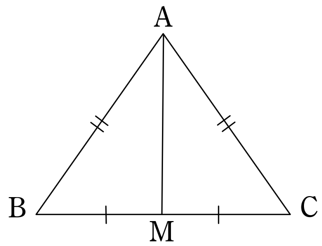
結論の一つが示された。

また、④より、$\angle ADB = \angle ADC$（　対応角　）　……… ⑤

よって、⑤より、$AD \perp BC$　となり、もう一つの結論も示された。

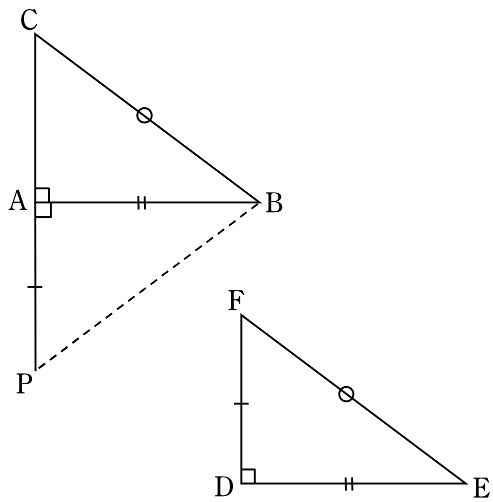
以上より、$\angle BAC$の2等分線、AからBCへの垂線、AからBCへの中線は一致することが示せた。　(q.e.d.)

（注）AからBCへの中線をAMとし、
三辺相等で$\triangle ABM \equiv \triangle ACM$ を示すことで、
AMが$\angle BAC$の2等分線、AからBCへの垂線
となっていることを示すこともできる。



問3.4

△ABC と△DEF を AB と DE が重なるようにくっつければ二等辺三角形ができ、問3.3 の結果が使えそうです。「くっつける」という部分をきちんと書くと、次のような証明になります。



［仮定］∠BAC＝∠EDF＝90° ……………………………①

AB=DE ……………………………②

BC=EF ……………………………③

［結論］△ABC≡△DEF

［証明］CA の A 側の延長上に

PA＝FD ……………………………④

となるような点 P をとる。すると、

∠BAP＝∠PAC－∠BAC ……………………………⑤

で、∠PAC＝180°　（平角定理）……………………………⑥

だから、⑤ ① ⑥ より、

∠BAP＝90° ……………………………⑦

△ABP と△DEF において、

AB＝DE ……………………………②

PA＝FD ……………………………④

① ⑦より、∠PAB=∠FDE ……………………………⑧

② ④，⑧より、△ABP ≡ △DEF（　二辺夾角相等　）……⑨

⑨より、BP＝EF　（ 対応辺 ）……………………………⑩

③ ⑩より、

△BCP は BC＝BP の二等辺三角形 ……………⑪

① ⑦より、∠BAC=∠BAP＝90° だから、△BCP において、BA は B から CP への垂線である。このことと⑪より、BA は B から CP への中線でもある（二等辺三角形の性質）から、

AC=AP ……………………………⑫

△ABC と△ABP において、

BC＝BP ……………………………⑪

AB＝AB（ 共通 ）……………………………⑬

AC=AP ……………………………⑫

⑪ ⑬ ⑫より、△ABC ≡ △ABP（　三辺相等　）……⑭

⑨ ⑭より、△ABC ≡ △DEF　(q.e.d.)

（注）⑫を導くところでは、BA が∠PBC の二等分線でもあることより、∠CBA=∠PBA を導いてもよいです。すると⑭の合同は二辺夾角相等で示すことになります。