

中1数学 2019年度 夏期講習 幾何ダイジェスト 本問解答

§4 合同の利用と平行四辺形条件

※ 欠席してしまった場合は、問 4.1～問 4.3 を自分で確認し、p.38, 39 の宿題 H4.1, H4.3 に取り組んで提出してください。余裕があれば全問解きましょう。

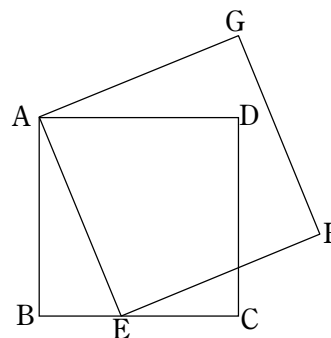
問4.1

[仮定]

ABCD は正方形①

AEFG は正方形.....②

[結論] C, D, G は一直線上



[方針]

C, D, G が一直線上にあることを言うには、 $\angle CDG = 180^\circ$ であることを言えばよいです。
 $\angle ADG = 90^\circ$ を言うには、 $\triangle ABE \cong \triangle ADG$ に注目しましょう。

[証明]

$\triangle ABE$ と $\triangle ADG$ において

①より $AB = AD$ ③

②より $AE = AG$ ④

また $\angle BAE = \angle BAD - \angle EAD$
 $= 90^\circ - \angle EAD$ (①より)⑤

$\angle DAG = \angle EAG - \angle EAD$
 $= 90^\circ - \angle EAD$ (②より)⑥

⑤⑥より $\angle BAE = \angle DAG$ ⑦

③④⑦より $\triangle ABE \cong \triangle ADG$ (二辺夾角相等)⑧

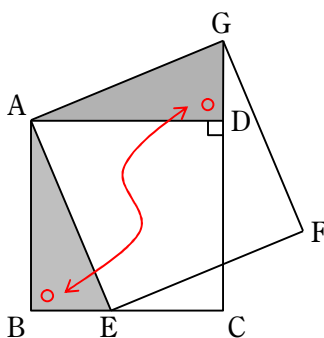
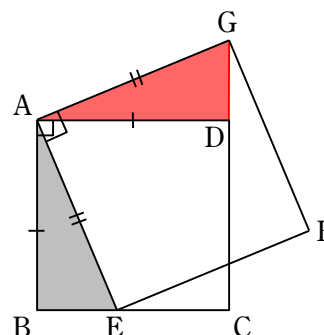
⑧より $\angle ABE = \angle ADG$ (合同の対応角)⑨

よって、 $\angle CDG = \angle CDA + \angle ADG$
 $= \angle CDA + \angle ABE$ (⑨より)
 $= 90^\circ + 90^\circ$ (①より)

$\therefore \angle CDG = 180^\circ$ ⑩

⑩より C, D, G は一直線上 (平角定理)

(q.e.d.)



問4.2

(1)

[仮定] $AB=CD$ ①

$AD=CB$ ②

[結論] $AB \parallel DC, AD \parallel BC$

[証明] $\triangle ABC$ と $\triangle CDA$ において、

$AB=CD$ ①

②より、 $CB=AD$ ②'

また、 $CA=AC$ (共通)③

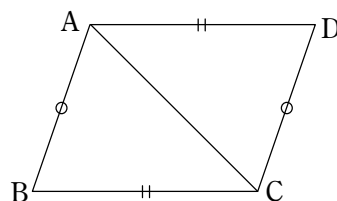
①②'③より、 $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$ (三辺相等)④

④より $\angle BAC = \angle DCA$ (合同の対応角) なので、

$AB \parallel DC$ (錯角定理)

④より $\angle BCA = \angle DAC$ (合同の対応角) なので、

$AD \parallel BC$ (錯角定理) (q.e.d.)



(2)

[仮定] $\angle A = \angle C$ ①

$\angle B = \angle D$ ②

[結論] $AB \parallel DC, AD \parallel BC$

[証明] 四角形 $ABCD$ の内角の和に注目して、

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$ ③

①②を③に代入すると、

$\angle A + \angle D + \angle A + \angle D = 360^\circ$

$\therefore \angle A + \angle D = 180^\circ$

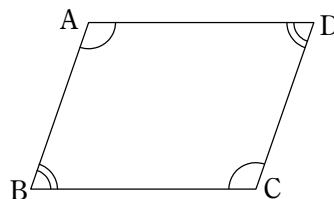
$\therefore AB \parallel DC$ (同側内角定理)

同様に、①②③より、

$\angle A + \angle B + \angle A + \angle B = 360^\circ$

$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ$

$\therefore AD \parallel BC$ (同側内角定理) (q.e.d.)



(3)

[仮定] 対角線が中点で交わる.....①

[結論] $AB \parallel DC, AD \parallel BC$

[証明] 四角形 $ABCD$ の対角線の交点を M とする。

$\triangle ABM$ と $\triangle CDM$ において、

①より、 $AM = CM$ ②

①より、 $BM = DM$ ③

また、 $\angle AMB = \angle CMD$ (対頂角定理)④

②③④より、 $\triangle ABM \equiv \triangle CDM$ (二辺夾角相等)

よって、 $\angle BAM = \angle DCM$ (合同の対応角)

ゆえに、 $AB \parallel DC$ (錯角定理)

となり、結論の一つが示された。

$\triangle ADM$ と $\triangle CBM$ において、

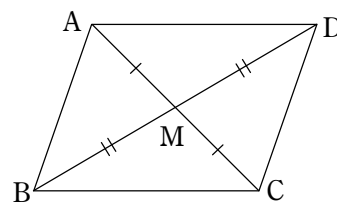
$\angle AMD = \angle CMB$ (対頂角定理)⑤

②③⑤より、 $\triangle ADM \equiv \triangle CBM$ (二辺夾角相等)

よって、 $\angle ADM = \angle CBM$ (合同の対応角)

ゆえに、 $AD \parallel BC$ (錯角定理)

となり、もう一つの結論が示された。 (q.e.d.)



(4)

[仮定] $BC \parallel DA$ ①

$BC = DA$ ②

[結論] $AB \parallel DC$ (結論はひとつ)

[証明] $\triangle ABC$ と $\triangle CDA$ において、

$BC = DA$ ②

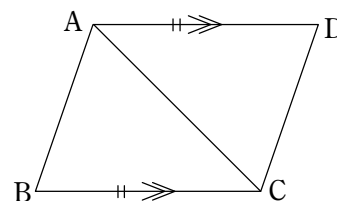
①より、 $\angle BCA = \angle DAC$ (錯角定理)③

また、 $CA = AC$ (共通)④

②③④より、 $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$ (二辺夾角相等)

よって、 $\angle BAC = \angle DCA$ (合同の対応角)⑤

⑤より、 $AB \parallel DC$ (錯角定理) (q.e.d.)



問4.3

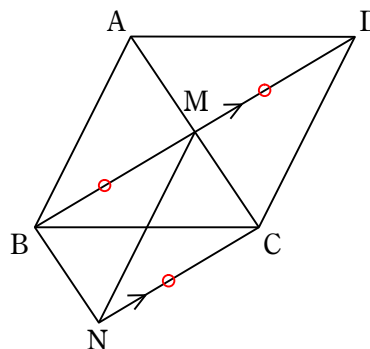
[仮定]

ABCD は平行四辺形①

BMCN は平行四辺形②

[結論]

CDMN は平行四辺形



[方針]

四角形が平行四辺形であることを証明したいなら、まずは平行な辺があるかどうかを確認するのは自然なことです。1組の平行な辺が見つかったら、他方も平行かどうか調べ、それがよく分からない場合には、最初に見つけた平行な2辺が等しいかどうかを考えてみるのが妥当でしょう。

[証明]

②より $BM \parallel NC$

$\therefore MD \parallel NC$ ③

①より $MD = BM$ ④

②より $BM = NC$ ⑤

④⑤より $MD = NC$ ⑥

③⑥より、1組の向かい合う辺が平行かつ等しいので
CDMN は平行四辺形

(q.e.d.)

問4.4

[仮定]

$\triangle PAB$ は正三角形①

$\triangle QBC$ は正三角形②

$\triangle RCA$ は正三角形③

[結論]

$APQR$ は平行四辺形

[証明]

$\triangle BPQ$ と $\triangle BAC$ において

①より $BP = BA$ ④

②より $BQ = BC$ ⑤

また $\angle PBQ = \angle PBA - \angle QBA$
 $= 60^\circ - \angle QBA$ (①より)⑥

$\angle ABC = \angle QBC - \angle QBA$
 $= 60^\circ - \angle QBA$ (②より)⑦

⑥⑦より $\angle PBQ = \angle ABC$ ⑧

④⑤⑧より $\triangle BPQ \equiv \triangle BAC$ (二辺夾角相等)⑨

⑨より $PQ = AC$ (合同の対応辺)⑩

③より $AC = AR$ ⑪

⑩⑪より $PQ = AR$ ⑫

同様に、 $\triangle QRC$ と $\triangle BAC$ において

③より $CR = CA$ ⑬

②より $CQ = CB$ ⑭

また $\angle RCQ = \angle RCA - \angle QCA$
 $= 60^\circ - \angle QCA$ (③より)⑮

$\angle ACB = \angle QCB - \angle QCA$
 $= 60^\circ - \angle QCA$ (②より)⑯

⑮⑯より $\angle RCQ = \angle ACB$ ⑰

⑬⑭⑰より $\triangle QRC \equiv \triangle BAC$ (二辺夾角相等)⑱

⑱より $RQ = AB$ (合同の対応辺)⑲

①より $AB = AP$ ⑳

⑲⑳より $RQ = AP$ ㉑

⑫㉑より、2組の向かい合う辺が等しいので

$APQR$ は平行四辺形

(q.e.d.)

上の方針は単純ですが、二度目の合同を示さずとも、⑫以降を次のようにして⑨の合同のみで証明することもできます。

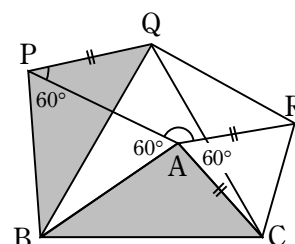
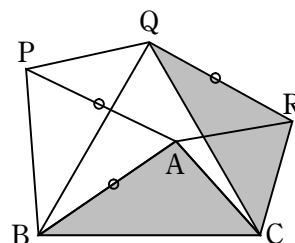
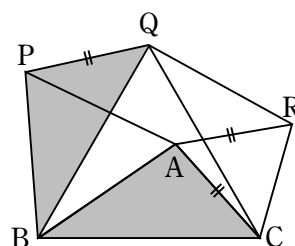
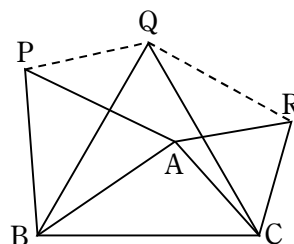
[証明]

(⑫までは上の証明と同じ。番号は⑬から振り直しています)

⑨より $\angle QPB = \angle CAB$ (合同の対応角)⑬

すると $\angle APQ = \angle QPB - \angle APB$
 $= \angle QPB - 60^\circ$ (①より)⑭

$\angle PAR = 360^\circ - \angle PAB - \angle CAB - \angle RAC$
 $= 360^\circ - 60^\circ - \angle CAB - 60^\circ$ (①,③より)
 $= 240^\circ - \angle CAB$ ⑮



$$\begin{aligned} \textcircled{14}\textcircled{15} \text{より} \quad \angle APQ + \angle PAR &= \angle QPB - 60^\circ + 240^\circ - \angle CAB \\ &= 180^\circ + \angle QPB - \angle CAB \end{aligned}$$

$$\therefore \angle APQ + \angle PAR = 180^\circ \quad (\textcircled{13} \text{より}) \quad \dots\dots \textcircled{16}$$

$$\textcircled{16} \text{より} \quad PQ \parallel AR \quad (\text{同側内角定理}) \quad \dots\dots\dots \textcircled{17}$$

⑫⑰より、1組の向かい合う辺が平行かつ等しいので
APQR は平行四辺形 (q.e.d.)