中1数学A　整数論・座標幾何　テキスト本問解答
§4　*N*進法と無限和

※　欠席してしまった場合は、問 4.1, 問 4.4 を自分で確認し、p25 の宿題に取り組んで提出してください。余裕があれば全問解きましょう。

問4.1

(i)
$$S = 3\times(1+4^1+4^2+\cdots+4^{n-1}+4^n)$$
$$= 3\times 1 + 3\times 4^1 + 3\times 4^2 + \cdots + 3\times 4^{n-1} + 3\times 4^n$$

を 4 進法で表すと

$$S = \underbrace{333\cdots33}_{(n+1)\text{桁}}{}_{(4)} = \underbrace{1000\cdots00}_{(n+2)\text{桁}}{}_{(4)} - 1_{(4)}$$

なので、10 進表記に戻すと、

$$S = \boxed{4^{n+1}-1}$$

(ii) $T = \dfrac{3\times(1+4^1+4^2+\cdots+4^{n-1}+4^n)}{3} = \dfrac{S}{3} = \boxed{\dfrac{4^{n+1}-1}{3}}$

(iii) 2 進法で表すと $U = \underbrace{111\cdots11}_{10\text{桁}}{}_{(2)} = \underbrace{1000\cdots00}_{11\text{桁}}{}_{(2)} - 1_{(2)}$

なので、10 進表記に戻すと、$U = 2^{10} - 1 = 1024 - 1 = \boxed{1023}$

問4.2

(あ)
何進法でも、
10 で割ると小数点が 1 つ左にずれ、
100 で割ると小数点が 2 つ左にずれます。

(1)　$101_{(4)} \div 10_{(4)} = \boxed{10.1_{(4)}}$

(2)　$111_{(4)} \div 100_{(4)} = \boxed{1.11_{(4)}}$

筆算で割り算を計算します。

(3)　$1_{(4)} \div 3_{(4)} = \boxed{0.\dot{1}_{(4)}}$

(4)　$1_{(4)} \div 11_{(4)} = \boxed{0.\dot{0}\dot{3}_{(4)}}$

$$\begin{array}{r} 0.111\cdots \\ 3\overline{)1.0} \\ \underline{3} \\ 10 \\ \underline{3} \\ 10 \\ \underline{3} \\ 1 \\ \ddots \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0.0303\cdots \\ 11\overline{)1.00} \\ \underline{33} \\ 100 \\ \underline{33} \\ 1 \\ \ddots \end{array}$$

(い)
$0.2 = 1 \div 5 = 1_{(4)} \div 11_{(4)}$ なので、
(あ) (4)より、

$$0.2 = \frac{1}{5} = 1_{(4)} \div 11_{(4)} = \boxed{0.\dot{0}\dot{3}_{(4)}}$$

(う)

$$\begin{aligned} a &= \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^4} + \frac{3}{4^6} + \frac{3}{4^8} + \cdots\cdots \\ &= 0 \times 1 + 0 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4^2} + 0 \times \frac{1}{4^3} + 3 \times \frac{1}{4^4} + 0 \times \frac{1}{4^5} + 3 \times \frac{1}{4^6} + \cdots\cdots \\ &= 0.\dot{0}\dot{3}_{(4)} = \frac{1_{(4)}}{11_{(4)}} = \boxed{\frac{1}{5}} \end{aligned}$$

$$b = \frac{a}{3} = \boxed{\frac{1}{15}}$$

問4.3

$0.\dot{3}_{(4)} = 0.3333\cdots\cdots_{(4)} = 1_{(4)}$ なので、

$333_{(4)} \times a = 333_{(4)} \times 0.\dot{0}0\dot{1}_{(4)} = 333_{(4)} \times 0.001001001001\cdots\cdots_{(4)}$

$= 0.333333333333\cdots\cdots_{(4)} = 1_{(4)}$

$\therefore a = \boxed{\dfrac{1_{(4)}}{333_{(4)}}}$

これを 10 進法での分数に直すと $333_{(4)} = 3\times 4^2 + 3\times 4 + 3\times 1 = 63$ なので、 $a = \boxed{\dfrac{1}{63}}$

(注) 問 3.4(2)と同様に、次のように考えてもよい。

$$
\begin{array}{rl}
 & 1000_{(4)} a = 1.001001001\cdots\cdots_{(4)} \\
-) & \qquad a = 0.001001001\cdots\cdots_{(4)} \\
\hline
 & 333_{(4)} a = 1_{(4)}
\end{array}
$$

$\therefore a = \boxed{\dfrac{1_{(4)}}{333_{(4)}}}$

問4.4

(1) まず、2 等分を繰り返すことで、チョコレートを 4 等分して、そのうち 3 つを 1 つずつ分ける。次に、残りの 1 つをまた 4 等分して、そのうち 3 つを 1 つずつ分ける。この操作をずっと続けていけば限りなく 3 等分に近づいていく。
（操作は有限時間では終わらないけれど）

(2) $0.\dot{1}_{(2)} = 0.1111\cdots\cdots_{(2)} = 1_{(2)}$ なので

$11_{(2)} \times a = 11_{(2)} \times 0.\dot{0}\dot{1}_{(2)} = 11_{(2)} \times 0.01010101\cdots\cdots_{(2)}$

$= 0.111111111111\cdots\cdots_{(2)} = 1_{(2)}$

$\therefore a = \dfrac{1_{(2)}}{11_{(2)}} = \dfrac{1}{2+1} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$

(3) $S = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{4^3} + \dfrac{1}{4^4} + \cdots\cdots = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{2^6} + \dfrac{1}{2^8} + \cdots\cdots = 0.\dot{0}\dot{1}_{(2)}$ なので、

S は(2)の a と同じものである。

したがって、(2)より $S = a = \boxed{\dfrac{1}{3}}$

※ (2)の無限小数も(3)の無限和も、(1)の「操作が終わった状態」での「等分されたチョコレートの量」を表していることに注意しましょう。