

中1数学A 整数論・座標幾何 テキスト本問解答

§6 直交条件

※ 欠席してしまった場合は、問6.1～問6.3を自分で確認し、p33の宿題に取り組んで提出してください。余裕があれば全問解きましょう。

問6.1

2直線が交わっているとき、その交点が原点Oに来るように平行移動しても傾きは変わらない。そこで、以下、原点を通る2直線が直交するための、傾き s, t の条件を考えていくことにする。

$O(0,0), A(1,s), B(-s,1)$ に対し、Aを原点中心に反時計回りに 90° 回転した点はBとなる。

なぜならば、下図において、

$\triangle OAH \equiv \triangle OBI$ (二辺夾角相等) より、

$\angle AOH = \angle BOI$ (対応角) だから、

$\angle AOB = \angle AOI + \angle BOI$

$= \angle AOI + \angle AOH$

$= \angle IOH$

$= 90^\circ$

となるからである。

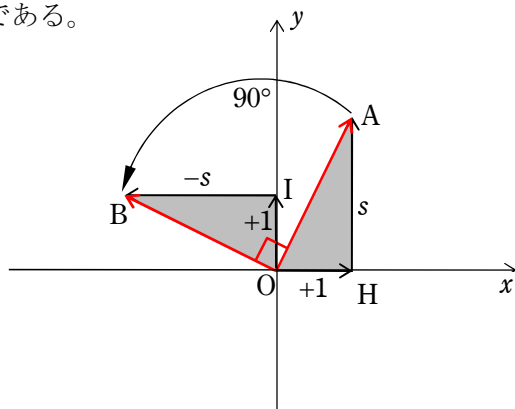
直線OAの傾きは s で、($s \neq 0$ のとき) それ

と垂直な直線OBの傾きは $\frac{1}{-s} = -\frac{1}{s}$ となる。

したがって、傾き s, t の2直線が直交するための条件は、

$$t = -\frac{1}{s}, \quad \therefore st = -1$$

である。



問6.2

l の傾きは5なので、 l と垂直である m の

傾きは $-\frac{1}{5}$ となる。

したがって、 m の式は

$$y = -\frac{1}{5}x + b$$

とおける。 m は点 $(10, 2)$ を通るから、

$x = 10, y = 2$ を代入して、

$$2 = -\frac{1}{5} \times 10 + b, \quad \therefore b = 2 + 2 = 4$$

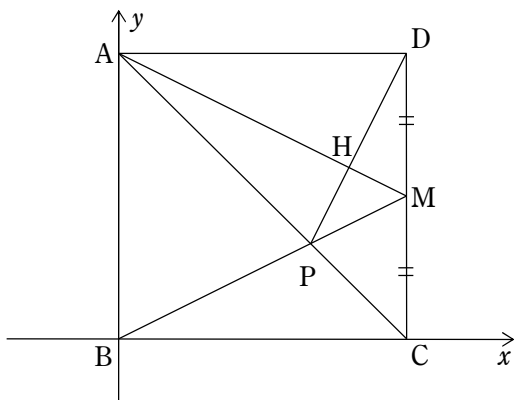
以上より、 m の式は、

$$y = -\frac{1}{5}x + 4$$

である。

問6.3

- (1) Bを原点とし、直線BCに沿って x 軸を、直線BAに沿って y 軸を設定する。



※ もちろんこの設定は一例であって、他の設定をして解くこともできる。

- (2) A, C, D, M の座標は
 $A(0, 2), C(2, 0), D(2, 2), M(2, 1)$

となる。直線AMの傾きは

$$\frac{1-2}{2-0} = -\frac{1}{2} \dots\dots\dots ①$$

である。

直線DPの傾きを求めるために、点Pの座標を計算しよう。

直線BMの傾きは

$$\frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$$

なので、原点Bを通る直線BMの式は

$$y = \frac{1}{2}x \dots\dots\dots ②$$

である。

また、直線ACの傾きは

$$\frac{0-2}{2-0} = -1$$

なので、 $A(0, 2)$ を通る直線ACの式は

$$y = -x + 2$$

である。PはBMとACの交点なので、その x 座標は

$$\frac{1}{2}x = -x + 2 \qquad \frac{3}{2}x = 2$$

$$\therefore x = \frac{4}{3}$$

であり、 y 座標は、BMの式②で計算すると、

$$y = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

となる。よって、Pの座標は $P\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

である。

したがって、直線DPの傾きは

$$\frac{2 - \frac{2}{3}}{2 - \frac{4}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2 \dots\dots\dots ③$$

である。

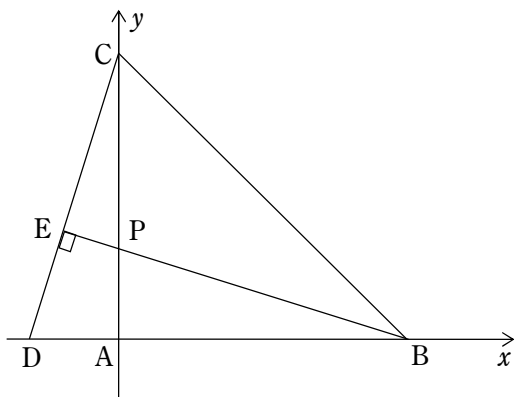
①③より、AMとDPの傾きの積は

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \times 2 = -1$$

なので、 $AM \perp DP$ が示された。(q.e.d.)

問6.4

A を原点とし、直線 AB に沿って x 軸を、
直線 AC に沿って y 軸を設定する。



B, C の座標は $B(1,0), C(0,1)$ となる。

$D(d,0)$ とおく ($d < 0$ であることに注意せよ)

と、直線 CD の傾きは $\frac{1-0}{0-d} = -\frac{1}{d}$ なので、

$CD \perp BE$ より、直線 BE の傾きは d である。

したがって、直線 BE の式は

$$y = dx + b$$

とおける。直線 BE は $B(1,0)$ を通るから、

$x=1, y=0$ を代入して、

$$0 = d \times 1 + b, \quad \therefore b = -d$$

以上より、直線 BE の式は

$$y = dx - d$$

である。これの y 切片に注目することで、

$P(0, -d)$ とわかり、直線 DP の傾きは

$$\frac{-d-0}{0-d} = 1 \text{ である。}$$

一方で、直線 BC の傾きは

$$\frac{0-1}{1-0} = -1 \text{ であり、DP と BC の傾きの積は}$$

$$1 \times (-1) = -1 \text{ なので、} DP \perp BC \text{ が示された。}$$

(q.e.d.)