

中1数学B 整数論・座標幾何 テキスト本問解答

§4 N進法と無限和

※ 欠席してしまった場合は、問 4.1, 問 4.4 を自分で確認し、p23 の宿題に取り組んで提出してください。余裕があれば全問解きましょう。

問4.1

$$(i) \quad S = 3 \times (1 + 4^1 + 4^2 + \cdots + 4^{n-1} + 4^n) \\ = 3 \times 1 + 3 \times 4^1 + 3 \times 4^2 + \cdots + 3 \times 4^{n-1} + 3 \times 4^n$$

を4進法で表すと

$$S = \underbrace{333 \cdots 33}_{(n+1)\text{桁}}_{(4)} = \underbrace{1000 \cdots 00}_{(n+2)\text{桁}}_{(4)} - 1_{(4)}$$

なので、10進表記に戻すと、

$$S = \boxed{4^{n+1} - 1}$$

$$(ii) \quad T = \frac{3 \times (1 + 4^1 + 4^2 + \cdots + 4^{n-1} + 4^n)}{3} = \frac{S}{3} = \boxed{\frac{4^{n+1} - 1}{3}}$$

$$(iii) \quad 2 \text{ 進法で表すと } U = \underbrace{111 \cdots 11}_{10\text{桁}}_{(2)} = \underbrace{1000 \cdots 00}_{11\text{桁}}_{(2)} - 1_{(2)}$$

$$\text{なので、10進表記に戻すと、} U = 2^{10} - 1 = 1024 - 1 = \boxed{1023}$$

問4.2

(あ)

何進法でも、

10 で割ると小数点が 1 つ左にずれ、

100 で割ると小数点が 2 つ左にずれます。

$$(1) \quad 101_{(4)} \div 10_{(4)} = \boxed{10.1_{(4)}}$$

$$(2) \quad 111_{(4)} \div 100_{(4)} = \boxed{1.11_{(4)}}$$

筆算で割り算を計算します。

$$(3) \quad 1_{(4)} \div 3_{(4)} = \boxed{0.\dot{1}_{(4)}}$$

$$(4) \quad 1_{(4)} \div 11_{(4)} = \boxed{0.\dot{0}\dot{3}_{(4)}}$$

$$\begin{array}{r} 0.111\cdots \\ 3 \overline{) 1.0} \\ \underline{3} \\ 10 \\ \underline{3} \\ 10 \\ \underline{3} \\ 1 \\ \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.0303\cdots \\ 11 \overline{) 1.00} \\ \underline{33} \\ 100 \\ \underline{33} \\ 1 \\ \dots \end{array}$$

(い)

$$0.2 = 1 \div 5 = 1_{(4)} \div 11_{(4)} \text{ なので、}$$

(あ) (4)より、

$$0.2 = \frac{1}{5} = 1_{(4)} \div 11_{(4)} = \boxed{0.\dot{0}\dot{3}_{(4)}}$$

(う)

$$\begin{aligned} a &= \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^4} + \frac{3}{4^6} + \frac{3}{4^8} + \cdots \\ &= 0 \times 1 + 0 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4^2} + 0 \times \frac{1}{4^3} + 3 \times \frac{1}{4^4} + 0 \times \frac{1}{4^5} + 3 \times \frac{1}{4^6} + \cdots \\ &= 0.\dot{0}\dot{3}_{(4)} = \frac{1_{(4)}}{11_{(4)}} = \boxed{\frac{1}{5}} \end{aligned}$$

$$b = \frac{a}{3} = \boxed{\frac{1}{15}}$$

問4.3

$0.\dot{3}_{(4)} = 0.3333\cdots_{(4)} = 1_{(4)}$ なので、

$$\begin{aligned} 333_{(4)} \times a &= 333_{(4)} \times 0.\dot{0}0\dot{1}_{(4)} = 333_{(4)} \times 0.001001001001\cdots_{(4)} \\ &= 0.3333333333\cdots_{(4)} = 1_{(4)} \end{aligned}$$

$$\therefore a = \boxed{\frac{1_{(4)}}{333_{(4)}}}$$

これを 10 進法での分数に直すと $333_{(4)} = 3 \times 4^2 + 3 \times 4 + 3 \times 1 = 63$ なので、 $a = \boxed{\frac{1}{63}}$

(注) 問 3.4(2)と同様に、次のように考えてもよい。

$$\begin{array}{r} 1000_{(4)} a = 1.001001001\cdots_{(4)} \\ -) \quad \quad a = 0.001001001\cdots_{(4)} \\ \hline 333_{(4)} a = 1_{(4)} \end{array}$$

$$\therefore a = \boxed{\frac{1_{(4)}}{333_{(4)}}}$$

問4.4

- (1) まず、2 等分を繰り返すことで、チョコレートを 4 等分して、そのうち 3 つを 1 つずつ分ける。次に、残りの 1 つをまた 4 等分して、そのうち 3 つを 1 つずつ分ける。この操作をずっと続けていけば限りなく 3 等分に近づいていく。

(操作は有限時間では終わらないけれど)

- (2) $0.\dot{1}_{(2)} = 0.1111\cdots_{(2)} = 1_{(2)}$ なので

$$\begin{aligned} 11_{(2)} \times a &= 11_{(2)} \times 0.\dot{0}1_{(2)} = 11_{(2)} \times 0.01010101\cdots_{(2)} \\ &= 0.1111111111\cdots_{(2)} = 1_{(2)} \end{aligned}$$

$$\therefore a = \frac{1_{(2)}}{11_{(2)}} = \frac{1}{2+1} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

- (3) $S = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \cdots = 0.\dot{0}1_{(2)}$ なので、

S は (2) の a と同じものである。

$$\text{したがって、(2)より } S = a = \boxed{\frac{1}{3}}$$

※ (2)の無限小数も(3)の無限和も、(1)の「操作が終わった状態」での「等分されたチョコレートの量」を表していることに注意しましょう。