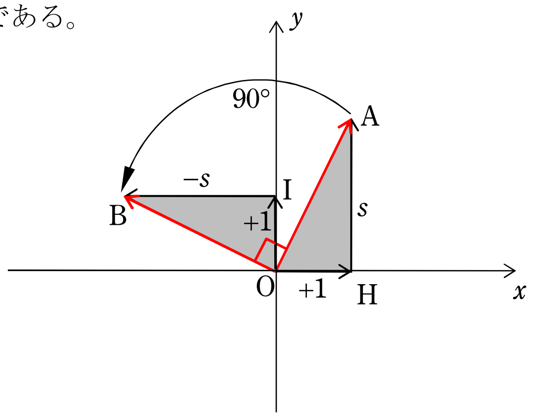
中1数学B　整数論・座標幾何　テキスト本問解答
§6　直交条件

※　欠席してしまった場合は、問 6.1～問 6.3 を自分で確認し、p31 の宿題に取り組んで提出してください。余裕があれば全問解きましょう。

問6.1
2 直線が交わっているとき、その交点が原点 O に来るように平行移動しても傾きは変わらない。そこで、以下、原点を通る 2 直線が直交するための、傾き s, t の条件を考えていくことにする。
$\mathrm{O}(0,0),\ \mathrm{A}(1,s),\ \mathrm{B}(-s,1)$ に対し、A を原点中心に反時計回りに $90°$ 回転した点は B となる。
なぜならば、下図において、
$\triangle\mathrm{OAH}\equiv\triangle\mathrm{OBI}$　（二辺夾角相等）より、
$\angle\mathrm{AOH}=\angle\mathrm{BOI}$　（対応角）だから、
$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOI}+\angle\mathrm{BOI}$
$\qquad=\angle\mathrm{AOI}+\angle\mathrm{AOH}$
$\qquad=\angle\mathrm{IOH}$
$\qquad=90°$
となるからである。
直線 OA の傾きは s で、（$s\neq0$ のとき）それと垂直な直線 OB の傾きは $\dfrac{1}{-s}=-\dfrac{1}{s}$ となる。
したがって、傾き s, t の 2 直線が直交するための条件は、

$$t=-\frac{1}{s},\qquad \therefore st=-1$$

である。



問6.2
l の傾きは 5 なので、l と垂直である m の傾きは $-\dfrac{1}{5}$ となる。
したがって、m の式は

$$y=-\frac{1}{5}x+b$$

とおける。m は点 $(10,2)$ を通るから、
$x=10$，$y=2$ を代入して、

$$2=-\frac{1}{5}\times10+b,\qquad \therefore b=2+2=4$$

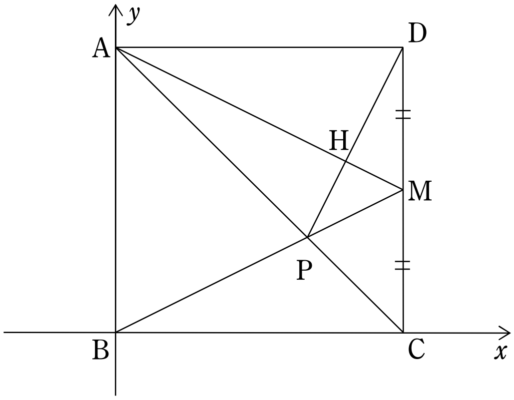
以上より、m の式は、

$$\boxed{y=-\frac{1}{5}x+4}$$

である。

問6.3

(1) Bを原点とし、直線BCに沿ってx軸を、直線BAに沿ってy軸を設定する。



※ もちろんこの設定は一例であって、他の設定をして解くこともできる。

(2) A, C, D, M の座標は

$A(0,2), C(2,0), D(2,2), M(2,1)$

となる。直線AMの傾きは

$$\frac{1-2}{2-0}=-\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

である。

直線DPの傾きを求めるために、点Pの座標を計算しよう。

直線BMの傾きは

$$\frac{1-0}{2-0}=\frac{1}{2}$$

なので、原点Bを通る直線BMの式は

$$y=\frac{1}{2}x \quad \cdots\cdots ②$$

である。

また、直線ACの傾きは

$$\frac{0-2}{2-0}=-1$$

なので、$A(0,2)$を通る直線ACの式は

$$y=-x+2$$

である。PはBMとACの交点なので、そのx座標は

$$\frac{1}{2}x=-x+2 \qquad \frac{3}{2}x=2$$

$$\therefore x=\frac{4}{3}$$

であり、y座標は、BMの式 ② で計算すると、

$$y=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$$

となる。よって、Pの座標は$P\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$である。

したがって、直線DPの傾きは

$$\frac{2-\frac{2}{3}}{2-\frac{4}{3}}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}=2 \quad \cdots\cdots ③$$

である。

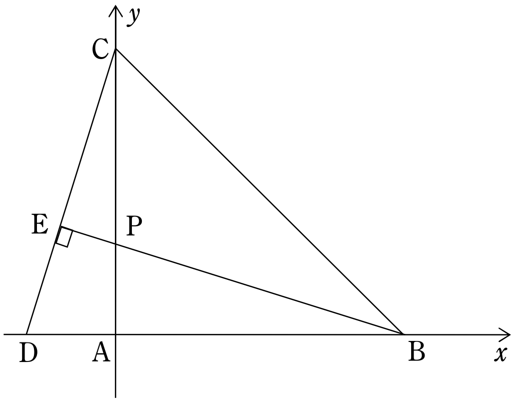
①③より、AMとDPの傾きの積は

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\times 2=-1$$

なので、$AM \perp DP$が示された。(q.e.d.)

問6.4

A を原点とし、直線 AB に沿って x 軸を、
直線 AC に沿って y 軸を設定する。



B, C の座標は $B(1,0), C(0,1)$ となる。
$D(d,0)$ とおく（$d<0$ であることに注意せよ）
と、直線 CD の傾きは $\dfrac{1-0}{0-d}=-\dfrac{1}{d}$ なので、
$CD \perp BE$ より直線 BE の傾きは d である。
したがって、直線 BE の式は

$$y=dx+b$$

とおける。直線 BE は $B(1,0)$ を通るから、
$x=1$，$y=0$ を代入して、

$$0=d\times 1+b, \qquad \therefore b=-d$$

以上より、直線 BE の式は

$$y=dx-d$$

である。これの y 切片に注目することで、
$P(0,-d)$ とわかり、直線 DP の傾きは
$\dfrac{-d-0}{0-d}=1$ である。
一方で、直線 BC の傾きは
$\dfrac{0-1}{1-0}=-1$ であり、DP と BC の傾きの積は
$1\times(-1)=-1$ なので、$DP \perp BC$ が示された。

(q.e.d.)