

中1数学B 整数論・座標幾何 テキスト本問解答

§7 三角形の五心

※ 欠席してしまった場合は、問 7.1, 問 7.2 を自分で確認しておきましょう。

問7.1

l は、 A, B の中点 M を通り、 AB に垂直な直線である。

AB の傾きは

$$\frac{-4 - (-8)}{-5 - 1} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$$

なので、 l の傾きは $\frac{3}{2}$ となる。

したがって、 l の式は

$$y = \frac{3}{2}x + b$$

とおける。 M の座標は、

$$\left(\frac{1 + (-5)}{2}, \frac{-8 + (-4)}{2} \right) = (-2, -6)$$

であり、 l はこの点を通るから、

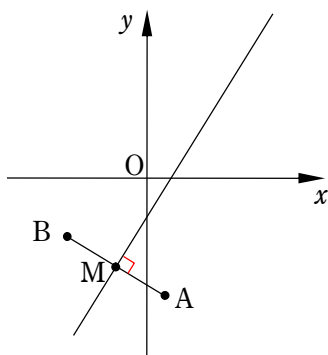
$x = -2$, $y = -6$ を代入して、

$$-6 = \frac{3}{2} \times (-2) + b, \quad \therefore b = -6 + 3 = -3$$

以上より、 l の式は、

$$\boxed{y = \frac{3}{2}x - 3}$$

である。



問7.2

(1)

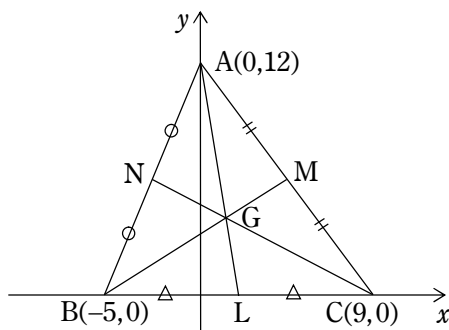
重心 BC, CA, AB の中点をそれぞれ L, M, N とすると、その座標は

$$L\left(\frac{-5+9}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (2, 0),$$

$$M\left(\frac{9+0}{2}, \frac{0+12}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, 6\right),$$

$$N\left(\frac{0+(-5)}{2}, \frac{12+0}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, 6\right)$$

である。重心 G は AL と BM (と CN) の交点である。



AL の傾きは $\frac{0-12}{2-0} = -6$ で、 y 切片は A の

y 座標の 12 だから、直線 AL の式は

$$y = -6x + 12 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

BM の傾きは $\frac{6-0}{\frac{9}{2} - (-5)} = \frac{12}{19}$ だから、直線 BM

の式は、

$$y = \frac{12}{19}x + a$$

とおける。 $B(-5, 0)$ を通るので、 $x = -5$, $y = 0$ を代入して、

$$0 = \frac{12}{19} \times (-5) + a, \quad \therefore a = \frac{12}{19} \times 5 = \frac{60}{19}$$

したがって、直線 BM の式は、

$$y = \frac{12}{19}x + \frac{60}{19} \dots\dots\dots ②$$

である。

①②より、G の x 座標は、

$$-6x + 12 = \frac{12}{19}x + \frac{60}{19}$$

$$-6x - \frac{12}{19}x = \frac{60}{19} - 12$$

$$-\frac{126}{19}x = -\frac{168}{19}$$

$$\therefore x = -\frac{168}{19} \times \left(-\frac{19}{126}\right) = \frac{4}{3}$$

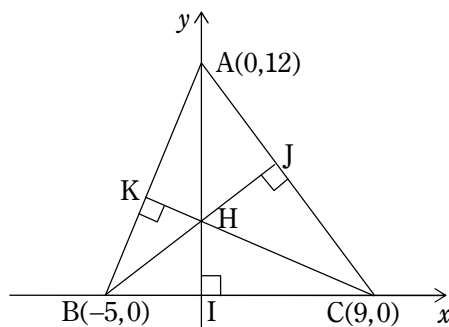
これを①に代入して、G の y 座標は、

$$y = -6 \times \frac{4}{3} + 12 = -8 + 12 = 4$$

以上より、G の座標は、 $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$ である。

※ 重心が中線を頂点の方から 2:1 に内分する点であることを利用して、問 5.3 の要領で G を求めてもよい。

垂心 A, B, C から対辺へ下ろした垂線の足をそれぞれ I, J, K とおく。垂心 H は AI と BJ (と CK) の交点である。



直線 AI は y 軸と一致しているので、H の x 座標は 0 であり、y 座標は直線 BJ の y 切片に一致する。直線 CA の傾きが $\frac{12-0}{0-9} = -\frac{4}{3}$ だから、

CA ⊥ BJ より、直線 BJ の傾きは $\frac{3}{4}$ である。

よって、直線 BJ の式は

$$y = \frac{3}{4}x + b$$

とおける。B(-5,0) を通るので、 $x = -5$, $y = 0$ を代入して、

$$0 = \frac{3}{4} \times (-5) + b, \quad \therefore b = \frac{3}{4} \times 5 = \frac{15}{4}$$

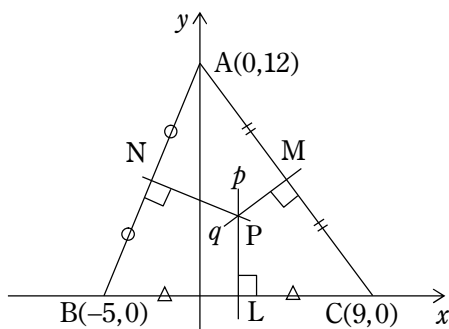
したがって、直線 BJ の式は

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{15}{4}$$

である。

以上より、H の座標は、 $\left(0, \frac{15}{4}\right)$ である。

外心 外心 P は、辺 BC の垂直二等分線 p と辺 CA の垂直二等分線 q (と辺 AB の垂直二等分線) の交点である。重心を求めたときと同様、BC, CA, AB の中点をそれぞれ L, M, N とする。



p は、 $L(2,0)$ を通り、BC (x 軸) に垂直な直線だから、 x 座標が 2 の点の集まりである。したがって、P は q 上で x 座標が 2 の点である。垂心を求めたときに調べたように、CA の傾きは $-\frac{4}{3}$ である。CA $\perp q$ より、 q は傾き $\frac{3}{4}$ の直線だから、その式は、

$$y = \frac{3}{4}x + c$$

とおける。M $\left(\frac{9}{2}, 6\right)$ を通るので、 $x = \frac{9}{2}$, $y = 6$ を代入して、

$$6 = \frac{3}{4} \times \frac{9}{2} + c, \quad \therefore c = 6 - \frac{27}{8} = \frac{21}{8}$$

したがって、直線 q の式は、

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{21}{8}$$

である。 $x = 2$ を代入して P の y 座標は、

$$y = \frac{3}{4} \times 2 + \frac{21}{8} = \frac{33}{8}$$

以上より、P の座標は $\left(2, \frac{33}{8}\right)$ である。

(2)

HP を 2:1 に内分する点 G' の座標を求める。P, G' から x 軸に下ろした垂線の足をそれぞれ

Q, R とする。R の x 座標は (1) より 2 であり、OQ:QR = 2:1 なので、Q の x 座標は

$$0 + (2 - 0) \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

でもある。 G' の y 座標も同じ考えにより、

$$\frac{15}{4} + \left(\frac{33}{8} - \frac{15}{4}\right) \times \frac{2}{3} = 4$$

従って、 G' の座標は $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$ であり、これは

(1) で求めた G の座標と一致するので、 G' と G は一致する。

よって、G, P, H が一直線上にあり、G が HP を 2:1 に内分することが示せた。

