

中1数学A 冬期 §1 外接円 本問解答

※ 欠席してしまった場合は、問 1.2, 問 1.3 を自分で確認し、p.7 の宿題に取り組んで提出してください。
 余裕があれば全問解きましょう。

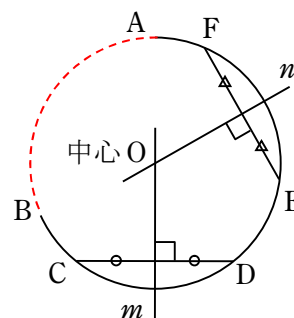
問1.1

まず、適当な2つの弦 CD と EF を定木で描く。

次に、弦 CD の垂直二等分線 m と弦 EF の垂直二等分線 n を作図する。

すると、弦の垂直二等分線はその円の中心を通るので（問 1.2 参照）、
 m と n の交点が円の中心 O になる。

最後に、中心が O で半径が OA の円を描けば、円の残りの部分が作図できる。



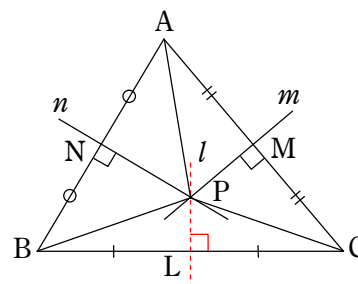
問1.2

(1)

BC, CA, AB の中点を L, M, N とする。

- [仮定] BC $\perp$ l ①
 CA $\perp$ m ②
 AB $\perp$ n ③
 BL = CL ④
 CM = AM ⑤
 AN = BN ⑥

[結論] l が m, n の交点 P を通る



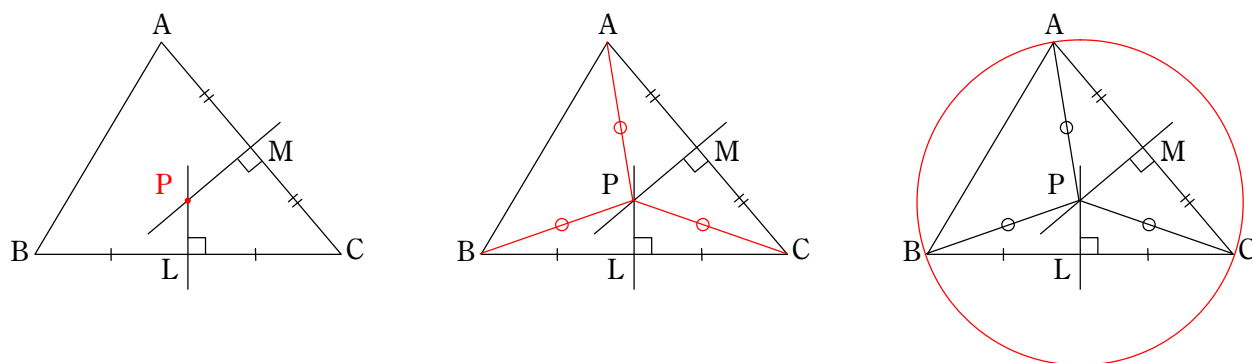
- [証明] $\triangle ANP$ と $\triangle BNP$ において、
 ③より、 $\angle ANP = \angle BNP$ ($= 90^\circ$) ⑦
 また、NP 共通 ⑧
 ⑥⑦⑧より、 $\triangle ANP \cong \triangle BNP$ (二辺夾角相等)
 よって、 $AP = BP$ (対応辺) ⑨
 $\triangle AMP$ と $\triangle CMP$ において、
 ②より、 $\angle AMP = \angle CMP$ ($= 90^\circ$) ⑩
 また、MP 共通 ⑪
 ⑤⑩⑪より、 $\triangle AMP \cong \triangle CMP$ (二辺夾角相等)
 よって、 $AP = CP$ (対応辺) ⑫
 $\triangle BLP$ と $\triangle CLP$ において、
 ④⑫より、 $BP = CP$ ⑬
 また、LP 共通 ⑭
 ④⑬⑭より、 $\triangle BLP \cong \triangle CLP$ (三辺相等)
 よって、 $\angle PLB = \angle PLC$ (対応角) ⑮
 また、 $\angle BLC = 180^\circ$ (平角) ⑯
 ⑮⑯より、 $\angle PLB = \angle PLC$ ($= 90^\circ$) ⑰
 ④⑰より、P は BC の垂直二等分線 l 上にある。
 すなわち、 l は P を通る。

(q.e.d.)

(2)

(1)の点Pは、 $AP=BP=CP$ をみたす点なので、点Pを中心として半径APの円を描くと、その円は $\triangle ABC$ の外接円になる。

したがって、 $\triangle ABC$ の外接円は、
三角形の2辺それぞれの垂直二等分線を作図し、
その交点を中心とし、交点から頂点までの長さを半径とする円を描くと、
作図できる。

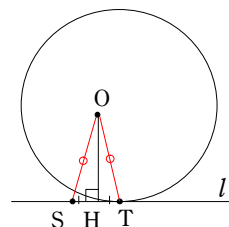


問1.3

(1)

[証明]

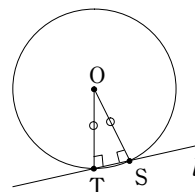
OTが l と垂直ではないとすると、
Oから l に下ろした垂線の足HはTと異なり、
直線OHに関してTと対称な点Sが l 上に存在する。
すると、 $SH=TH$, $\angle OHS=\angle OHT (=90^\circ)$, $OH=OH$ (共通) より、
 $\triangle OHS \equiv \triangle OHT$ (二辺夾角相等) となるので、
 $OS=OT$ (対応辺) となる。
よって、円Oは2点T,Sを通ることになり、
 l が円OとTのみを共有することに矛盾。
したがって、背理法により、 $OT \perp l$ (q.e.d.)



(2)

[証明]

l が接線ではないとすると、
 l はT以外の点で円Oと交わる。
その点をSとすると、
 $\triangle OTS$ は $OT=OS$ (半径) の二等辺三角形であるが、
 $OT \perp l$ (仮定) なので、底角が $\angle OST=\angle OTS=90^\circ$ となり、
三角形の内角の和が 180° であることに矛盾。
したがって、背理法により、 l は接線となる。 (q.e.d.)



問1.4

(1)

O は $\triangle ABP$ の外心なので $OA=OB=OP$

よって、底角定理より、

$\angle OAP = \angle OPA (=a \text{ とする})$, $\angle OBP = \angle OPB (=b \text{ とする})$

三角形 ABP に内角定理を用いると、

$$\angle BAP + \angle ABP + \angle APB = 180^\circ$$

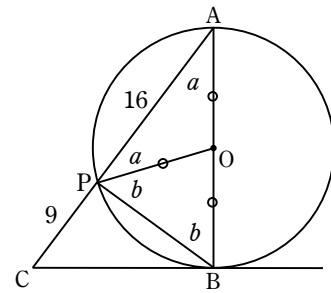
$$\therefore a + b + (a + b) = 180^\circ$$

$$\therefore a + b = 90^\circ$$

$$\therefore \angle APB = 90^\circ \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

これより、 $BP \perp AC$

(q.e.d.)



(2)

$\triangle ABC$ と $\triangle APB$ において、

直線 BC は円 O の接線なので、

$$\angle ABC = 90^\circ \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{より、} \angle ABC = \angle APB \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

$$\text{また、} \angle A \text{ は共通} \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}\textcircled{4} \text{より、} \triangle ABC \sim \triangle APB \text{ (二角相等)}$$

よって、 $AC : AB = AB : AP$ (対応辺の比)

したがって、

$$AB^2 = AC \times AP = (16 + 9) \times 16 = 400$$

$$\therefore AB = \boxed{20} (> 0)$$

