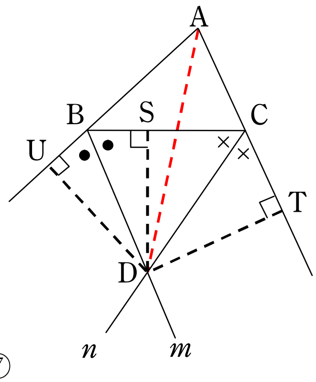
中1数学A　冬期§3　傍接円　本問解答

※　欠席してしまった場合は、問 3.2 , 問 3.4 を自分で確認し、p.16 の宿題 H3.1 に取り組んで提出してください。余裕があれば全問解きましょう。

問3.1

(1)
△ABC の∠A の二等分線を l 、∠B の外角, ∠C の外角の二等分線をそれぞれ m, n とし、m, n の交点を D とする。l が D を通ることを示そう。D から辺 BC に下ろした垂線の足を S 、D から AC の延長, AB の延長 に下ろした垂線の足をそれぞれ T , U とする。

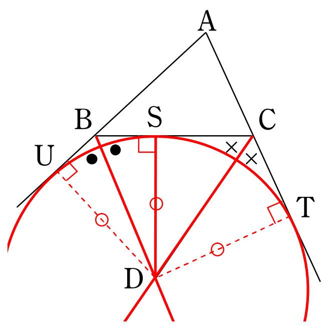


［仮定］ l が∠BAC の二等分線………………①
　　m が∠ABC の外角の二等分線…………②
　　n が∠BCA の外角の二等分線……………③
　　DS⊥BC……………………………………④
　　DT⊥CA……………………………………⑤
　　DU⊥AB……………………………………⑥

［結論］ l, m, n は 1 点 D で交わる

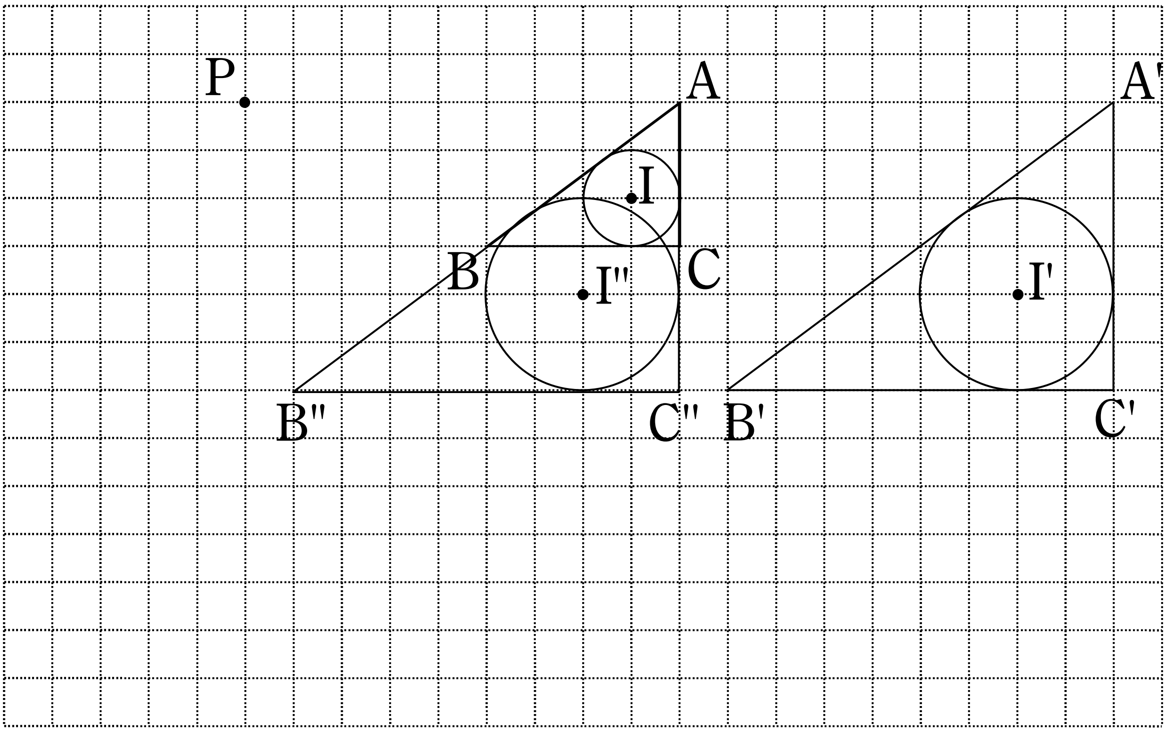
［証明］ △BDS と△BDU において、
②より、∠DBS=∠DBU…………………………………………⑦
④⑥より、∠DSB=∠DUB（=90°）………………………………⑧
また、BD 共通……………………………………………………⑨
⑦⑧⑨より、△BDS≡△BDU（二角一対辺相等）
よって、DS=DU（対応辺）………………………………………⑩
△CDS と△CDT において、
③より、∠DCS=∠DCT…………………………………………⑪
④⑤より、∠DSC=∠DTC（=90°）………………………………⑫
また、CD 共通……………………………………………………⑬
⑪⑫⑬より、△CDS≡△CDT（二角一対辺相等）
よって、DS=DT（対応辺）………………………………………⑭
△ADT と△ADU において、
⑩⑭より、DT=DU…………………………………………………⑮
⑤⑥より、∠DTA=∠DUA= 90°……………………………………⑯
また、AD 共通……………………………………………………⑰
⑮⑯⑰より、△ADT≡△ADU（斜辺一辺相等）
よって、∠DAT=∠DAU（対応角）
なので、①より、D は∠BAC の二等分線 l 上にある。
すなわち、∠A, ∠B の外角, ∠C の外角 の二等分線 l, m, n は、1 点 D で交わる。　(q.e.d.)

(2)
(1)の点 D は、DS=DT=DU をみたす点なので、
点 D を中心として半径 DS の円を描くと、
その円は S , T , U を通る。
④⑤⑥より、直線 BC, CA, AB はそれぞれこの円の接線となるので、
円 D は△ABC の傍接円になる。
したがって、△ABC の傍接円は、
三角形の 2 つの外角それぞれの二等分線を作図し、
その交点を中心とし、交点からどれか 1 つの辺または辺の延長に
下ろした垂線の足までの長さを半径とする円を描くと、作図できる。



問3.2

△ABC と円 I を、点 P を中心に 2 倍に相似拡大したものが△A'B'C' と円 I' で、点 A を中心に 2 倍に相似拡大したものが△AB"C" と円 I" である。



問3.3

点 O を中心とする相似拡大を考えると、

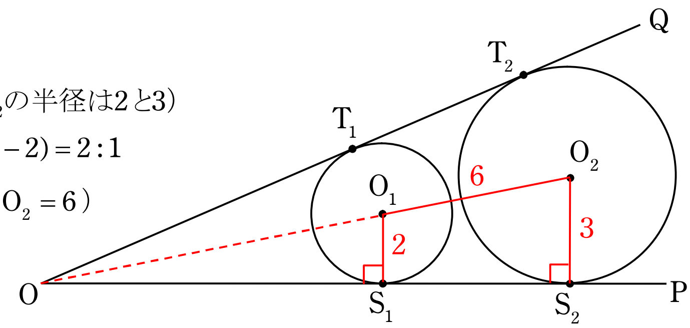
$\triangle OO_2S_2$ は、$\triangle OO_1S_1$ の相似拡大なので、

$OO_1 : OO_2 = O_1S_1 : O_2S_2$ （対応辺の比）

$= 2 : 3$ （仮定より、2円O_1, O_2の半径は2と3）

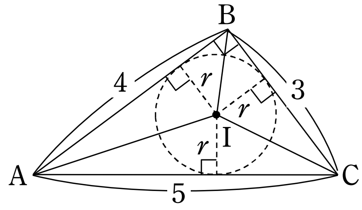
よって、$OO_1 : O_1O_2 = OO_1 : (OO_2 - OO_1) = 2 : (3-2) = 2 : 1$

$\therefore \quad OO_1 = 2\,O_1O_2 = 2 \times 6 = \boxed{12}$ （仮定より、$O_1O_2 = 6$）



問3.4

(1)



内接円の半径をrとして、△ABC の面積をrで表すと、

$$\begin{aligned}&\triangle \mathrm{ABC}\\&=\triangle \mathrm{IAB}+\triangle \mathrm{IBC}+\triangle \mathrm{ICA}\\&=\frac{1}{2}\times 4\times r+\frac{1}{2}\times 3\times r+\frac{1}{2}\times 5\times r\\&=\frac{1}{2}\times(4+3+5)\times r=6r\end{aligned}$$

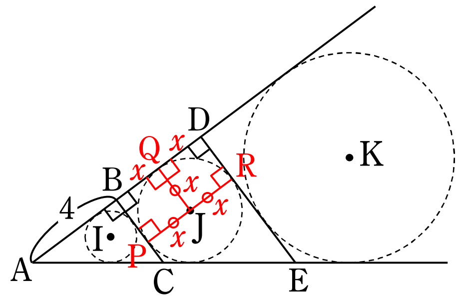
一方、

$$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times \mathrm{AB}\times \mathrm{BC}=\frac{1}{2}\times 4\times 3=6$$

なので、

$$6r=6 \quad \therefore r=\boxed{1}$$

(2)



円Jは△ADE の内接円である。円J と BC, BD, DE の接点をそれぞれP, Q, R とおく。

円J の半径をxとおくと、DRJQ, BPJQ は正方形なので、

BD=BQ+DQ=2 JQ=2x

△ADE は△ABC の点 A を中心とする相似拡大であり、その相似比は、内接円 I, J の半径の比$1:x$になる。

したがって、

$\mathrm{AB}:\mathrm{AD}=1:x$

$4:(4+2x)=1:x$

$4x=4+2x$

$2x=4 \quad \therefore x=2$

よって、

$\mathrm{BC}:\mathrm{DE}=1:x$

$3:\mathrm{DE}=1:2$

$\therefore \boxed{\mathrm{DE}=6}$

(3)

円J と円 K は、それぞれ△ABC と△ADE の傍接円であり、

△ADE と円 K は、△ABC と円J の点 A を中心とする相似拡大である。

したがって、円 K の半径をyとおくと、

その相似比は、傍接円 J, K の半径の比$2:y$になる。

よって、

$\mathrm{BC}:\mathrm{DE}=2:y$

$3:6=2:y$

$y=4$

$\therefore \boxed{\text{円Kの半径は}\,4}$