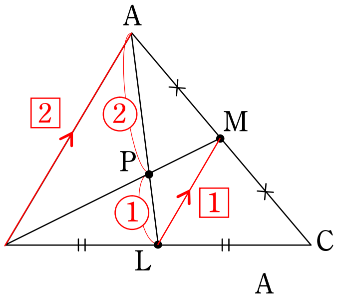
中1数学A　冬期　§4　重心･垂心の存在　本問解答

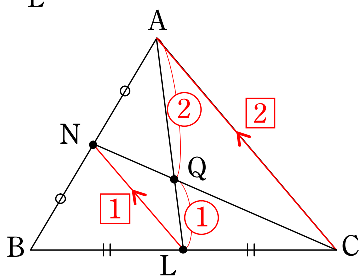
※　欠席してしまった場合は、問 4.1 を自分で確認してください。余裕があれば全問解きましょう。

問4.1

(1)

[証明 1]

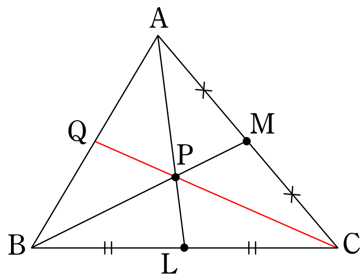




AL に対して、BM との交点 P を考えると、
M,L が AC,BC の中点なので、中点連結定理より、
AB : ML=2 : 1 ………………………………………………………… ①
AB // ML ………………………………………………………………… ②
①②より、AP : PL=2 : 1（平行線と比の定理）…………… ③
AL に対して、CN との交点 Q を考えると、
同様にして、AQ : QL=2 : 1 ………………………………… ④

③④より、P と Q は AL を 2 : 1 に内分する点なので一致し、
3 本の中線 AL,BM,CN は 1 点 P で交わる。　　　　(q.e.d.)

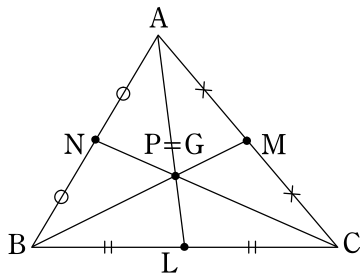
[証明 2]



AL と BM の交点を P とし、CP の延長線と AB との交点を Q とする。
L が BC の中点なので、△ABP : △ACP=BL : CL=1 : 1………………… ⑤
M が AC の中点なので、△ABP : △CBP=AM : CM=1 : 1……………… ⑥
⑤⑥より、△ACP : △BCP=1 : 1……………………………………………… ⑦
ここで、AQ : BQ=△ACP : △BCP……………………………………………… ⑧
⑦⑧より、AQ : BQ=1 : 1、すなわち、AQ=BQ
よって、CQ は中線 CN と一致するので、
3 本の中線 AL,BM,CN は 1 点 P で交わる。　　　　(q.e.d.)

(2)

[証明]



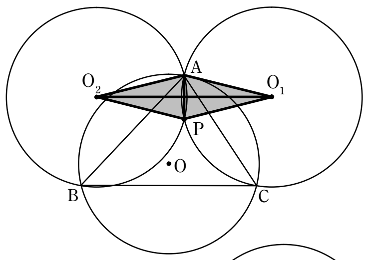
3 本の中線の交点を G とおくと、
(1)の [証明 1] のなかで P=G として、AG : GL=2 : 1
他の中線 BM, CN でも同様なので、
G は中線 AL, BM, CN を 2 : 1 に内分する。　　　(q.e.d.)

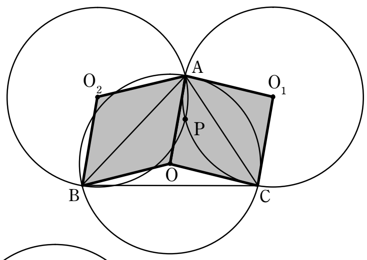
(3)[#]　三角形の厚紙で実験してみよう。

問4.2

［仮定］3 円 O_1, O_2, O_3 の半径が等しい ……………………………………………………①

(1)(2)は、H3.2 と同様なので、証明の方針だけを書いておきます。詳しくは、H3.2 の解答を参照してください。





(1)

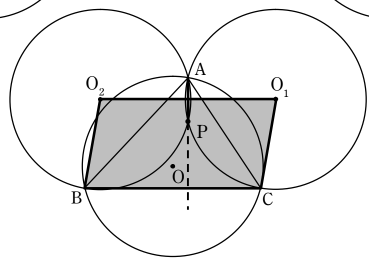
［結論］AP⊥BC

［証明の方針］

H3.2 と同様に、

①より、四角形 AO_1PO_2 はひし形なので、

$AP \perp O_1O_2$



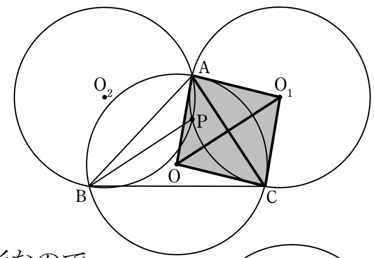
①より、四角形 $AOBO_2$, $AOCO_1$ はひし形なので、

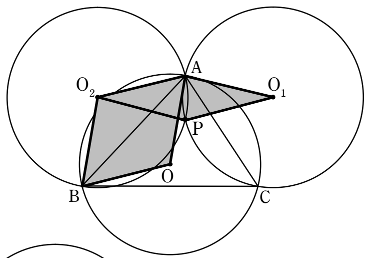
四角形 BCO_1O_2 の向かい合う 1 組の辺が平行かつ等しい

ことが示せ、BCO_1O_2 は平行四辺形である。

よって、$BC /\!/ O_2O_1$ なので、$AP \perp O_1O_2$ と合わせて、

AP⊥BC である。





(2)

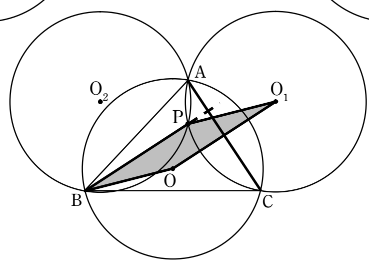
［結論］BP⊥AC

［証明の方針］

(1)と同様に、

①より、四角形 $AOCO_1$ はひし形なので、

$AC \perp OO_1$



①より、四角形 $AOBO_2$, AO_1PO_2 はひし形なので、

四角形 BOO_1P の向かい合う 1 組の辺が平行かつ等しい

ことが示せ、BOO_1P は平行四辺形である。

よって、$BP /\!/ OO_1$ なので、$AC \perp OO_1$ と合わせて、

BP⊥AC である。

(3)

［証明］(2)と同様にして、CP⊥AB もいえるので、(1)(2)の結果と合わせると、

3 辺 AB, BC, CA への 3 本の垂線 CP , AP , BP は、1 点 P（垂心という）で交わるとわかる。　(q.e.d.)

(4)

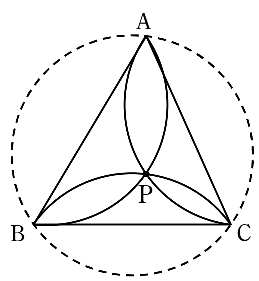
［証明］円 O の弧 AB を辺 AB に対して折り返した弧が円 O_2 の弧 AB、

円 O の弧 AC を辺 AC に対して折り返した弧が円 O_1 の弧 AC で、

(3)の結果から、その交点 P が△ABC の垂心である。

したがって、△ABC の外接円の弧 AB, BC を辺 AB, AC に対して

折り返した弧の交点 P は△ABC の垂心である。



同様に、△ABC の外接円の弧 BC, CA を辺 BC, CA に対して

折り返した弧の交点も△ABC の垂心なので、その交点は P である。

したがって、外接円を各辺に対して折り返した弧 AB,BC,CA は、一点 P で交わる　(q.e.d.)