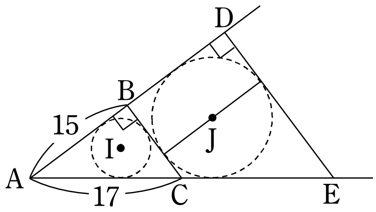
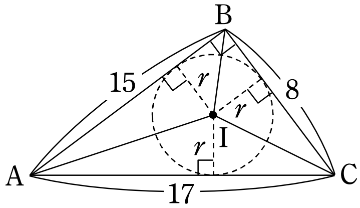
中1数学A 2019年度 冬期 三角形の五心 宿題解答
§3 傍接円

H3.1



(1) 内接円の半径を利用して△ABC の面積を表すと



$\triangle ABC$

$= \triangle IAB + \triangle IBC + \triangle ICA$

$= \dfrac{1}{2} \times 15 \times r + \dfrac{1}{2} \times 8 \times r + \dfrac{1}{2} \times 17 \times r$

$= \dfrac{1}{2} \times (15 + 8 + 17) \times r = 20r$

一方、

$\triangle ABC = \dfrac{1}{2} \times AB \times BC = \dfrac{1}{2} \times 15 \times 8 = 60$

なので、

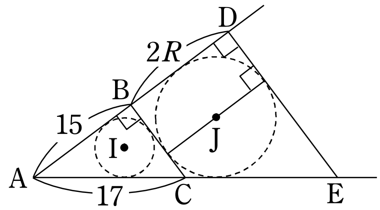
$20r = 60 \quad \therefore r = \boxed{3}$

(2) △ADE は、△ABC を、点 A を中心として相似拡大したものになっている。
この拡大によって、△ABC の内接円 I は、△ADE の内接円 J に相似拡大される。
このことを利用して考えよう。
△ABC と△ADE の相似比は、

$AB : AD = AB : (AB + BD)$

$= 15 : (15 + 2R)$ ……………… ①

（BD は円 J の直径と等しいことに注意）



円 I と円 J の相似比は半径の比に等しく、

$r : R = 3 : R$ ……………………………… ②

①,②は等しいので

$15 : (15 + 2R) = 3 : R$

$15R = 45 + 6R$

$9R = 45 \quad \therefore R = \boxed{5}$

(3) △ABC と△ADE、円 I と円 J の相似比が等しいことから、

$BC : DE = r : R \quad \therefore 8 : DE = 3 : 5$

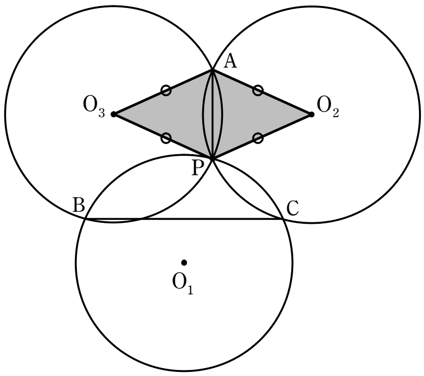
したがって、$DE = 8 \times \dfrac{5}{3} = \boxed{\dfrac{40}{3}}$

H3.2

［仮定］

3 円 O_1, O_2, O_3 の半径が等しい……………①

(1)　［結論］$AP \perp O_2O_3$



［証明］

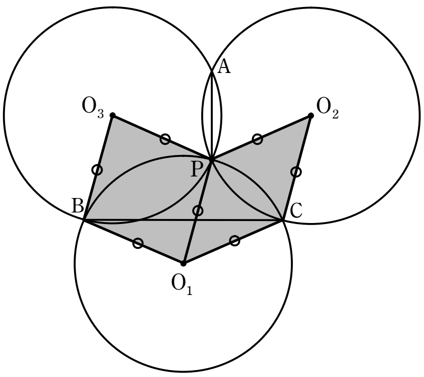
①より、$O_2A = O_2P = O_3A = O_3P$ なので、

四角形 AO_2PO_3 は、ひし形である。

よって、その対角線は直交し、$AP \perp O_2O_3$

(q.e.d.)

(2)　［結論］BCO_2O_3 が平行四辺形



［証明］

まず①より、$BO_3 = CO_2$ ……………………………②

また、①より、$O_1B = O_1P = O_3B = O_3P$ なので、

四角形 BO_1PO_3 は、ひし形であり、

よって、$BO_3 /\!/ O_1P$ ……………………………③

①より、$O_1C = O_1P = O_2C = O_2P$ なので、

四角形 CO_1PO_2 は、ひし形であり、

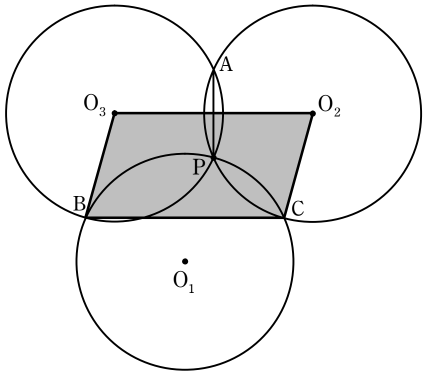
よって、$CO_2 /\!/ O_1P$ ……………………………④

③④より、$BO_3 /\!/ CO_2$ ……………………………⑤

②⑤より、向かい合う 1 組の辺が平行かつ等しいので、四角形 BCO_2O_3 は平行四辺形である。

(q.e.d.)

(3)　［結論］$AP \perp BC$



［証明］

(2)より、四角形 BCO_2O_3 は平行四辺形

なので、$BC /\!/ O_3O_2$ ……………………………⑥

(1)より、$AP \perp O_2O_3$ ……………………………⑦

⑥⑦より、$AP \perp BC$ である。

(q.e.d.)