

中1数学B 冬期§1 外接円 本問解答

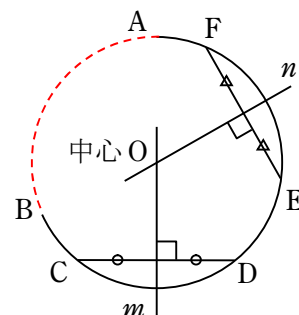
※ 欠席してしまった場合は、問 1.2 ～ 問 1.4 を自分で確認し、p.7 の宿題に取り組んで提出してください。
 余裕があれば全問解きましょう。

問1.1

まず、適当な 2 つの弦 CD と EF を定木で描く。

次に、弦 CD の垂直二等分線 m と弦 EF の垂直二等分線 n を作図する。

すると、弦の垂直二等分線はその円の中心を通るので（問 1.2 参照）、
 m と n の交点が円の中心 O になる。



最後に、中心が O で半径が OA の円を描けば、円の残りの部分が作図できる。

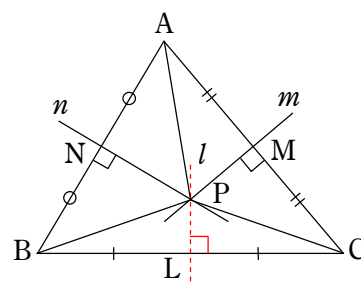
問1.2

(1)

BC, CA, AB の中点を L, M, N とする。

- [仮定] $BC \perp l$ ①
 $CA \perp m$ ②
 $AB \perp n$ ③
 $BL = CL$ ④
 $CM = AM$ ⑤
 $AN = BN$ ⑥

[結論] l が m, n の交点 P を通る



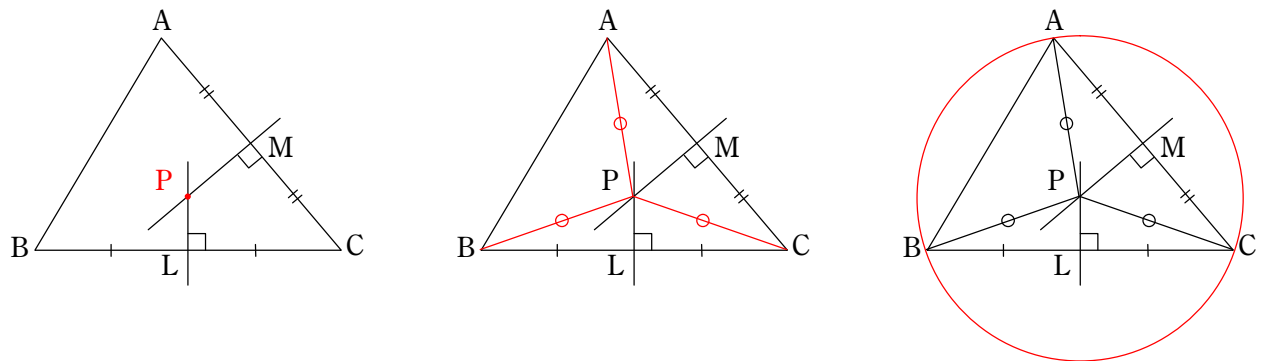
- [証明] $\triangle ANP$ と $\triangle BNP$ において、
 ③より、 $\angle ANP = \angle BNP (= 90^\circ)$ ⑦
 また、NP 共通 ⑧
 ⑥⑦⑧より、 $\triangle ANP \equiv \triangle BNP$ (二辺夾角相等)
 よって、 $AP = BP$ (対応辺) ⑨
 $\triangle AMP$ と $\triangle CMP$ において、
 ②より、 $\angle AMP = \angle CMP (= 90^\circ)$ ⑩
 また、MP 共通 ⑪
 ⑤⑩⑪より、 $\triangle AMP \equiv \triangle CMP$ (二辺夾角相等)
 よって、 $AP = CP$ (対応辺) ⑫
 $\triangle BLP$ と $\triangle CLP$ において、
 ④⑫より、 $BP = CP$ ⑬
 また、LP 共通 ⑭
 ④⑬⑭より、 $\triangle BLP \equiv \triangle CLP$ (三辺相等)
 よって、 $\angle PLB = \angle PLC$ (対応角) ⑮
 また、 $\angle BLC = 180^\circ$ (平角) ⑯
 ⑮⑯より、 $\angle PLB = \angle PLC (= 90^\circ)$ ⑰
 ④⑰より、 P は BC の垂直二等分線 l 上にある。
 すなわち、 l は P を通る。

(q.e.d.)

(2)

(1)の点Pは、 $AP=BP=CP$ をみたす点なので、点Pを中心として半径APの円を描くと、その円は $\triangle ABC$ の外接円になる。

したがって、 $\triangle ABC$ の外接円は、
三角形の2辺それぞれの垂直二等分線を作図し、
その交点を中心とし、交点から頂点までの長さを半径とする円を描くと、
作図できる。



問1.3

(1)

[証明]

OT が l と垂直ではないとすると、

O から l に下ろした垂線の足 H は T と異なり、

直線 OH に関して T と対称な点 S が l 上に存在する。

すると、 $SH=TH$, $\angle OHS=\angle OHT (=90^\circ)$, $OH=OH$ (共通) より、

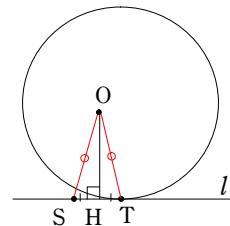
$\triangle OHS \equiv \triangle OHT$ (二辺夾角相等) となるので、

$OS=OT$ (対応辺) となる。

よって、円 O は 2 点 T, S を通ることになり、

l が円 O と T のみを共有することに矛盾。

したがって、背理法により、 $OT \perp l$ (q.e.d.)



(2)

[証明]

l が接線ではないとすると、

l は T 以外の点で円 O と交わる。

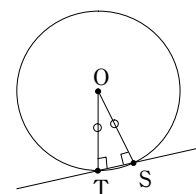
その点を S とすると、

$\triangle OTS$ は $OT=OS$ (半径) の二等辺三角形であるが、

$OT \perp l$ (仮定) なので、底角が $\angle OST = \angle OTS = 90^\circ$ となり、

三角形の内角の和が 180° であることに矛盾。

したがって、背理法により、 l は接線となる。 (q.e.d.)



問1.4

$\triangle ABC$ と $\triangle APB$ において、

直線 BC は円 O の接線なので、

$\angle ABC = 90^\circ$ ①

O は $\triangle ABP$ の外心なので $OA=OB=OP$

よって、右図より、 $\triangle ABP$ の内角和を考えて、

$\angle APB = 90^\circ$ ②

①②より、 $\angle ABC = \angle APB$ ③

また、 $\angle A$ は共通④

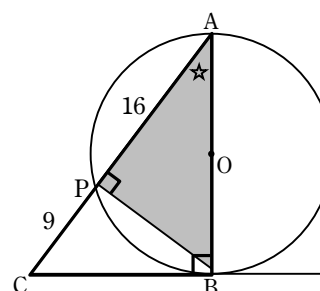
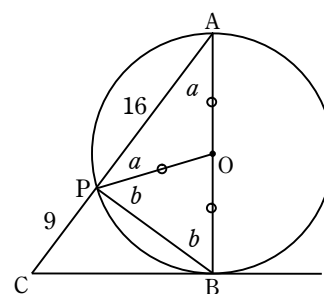
③④より、 $\triangle ABC \sim \triangle APB$ (二角相等)

よって、 $AC : AB = AB : AP$ (対応辺の比)

したがって、

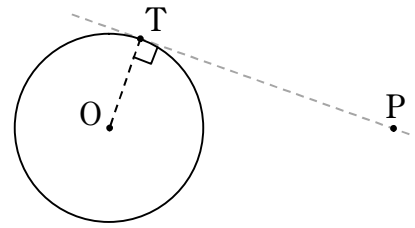
$$AB^2 = AC \times AP = (16 + 9) \times 16 = 400$$

$$\therefore AB = \boxed{20} (> 0)$$

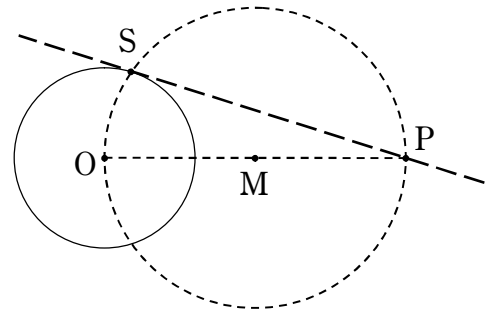


問1.5

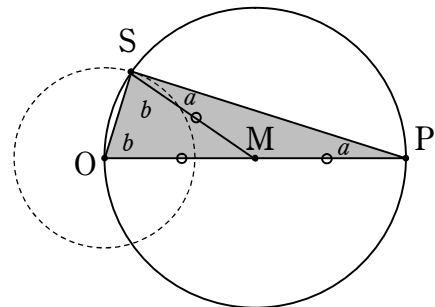
(考え方) 円 O と P から円 O へ引いた接線との接点を T とすると、
 接線 PT と半径 OT は垂直なので、円 O の周上に
 $\angle OTP = 90^\circ$ となる点 T をどう作図するかを考えればよい。
 $\angle OTP = 90^\circ$ となる点 T は、直径 OP の円周上の点になるので…



[作図] そこで、まず OP の中点 M を作図し、
 M を中心とし半径 OM の円 M を描く。
 この円 M と円 O の交点を S とし、
 2 点 P, S を通る直線を引くと、
 直線 PS が P から円 O に引いた接線となる。



[証明] 作図の仕方から、
 $OM = SM = PM$ (半径) なので、
 右図より、 $\triangle OSP$ の内角和を考えれば、
 $\angle OSP = 90^\circ$ である。
 円 O において、その周上の点 S を通る直線で
 半径 OS と直交するものは円 O の接線なので、
 $OS \perp PS$ より、直線 PS は円 O の接線である。



(q.e.d.)