

中1数学B 冬期§2 内接円 本問解答

※ 欠席してしまった場合は、問 2.1～ 問 2.4 を自分で確認し、p.11 の宿題に取り組んで提出してください。
余裕があれば全問解きましょう。

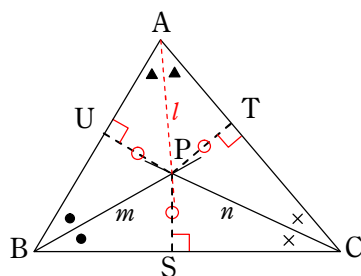
問2.1

(1)

$\triangle ABC$ の $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ の二等分線を l, m, n とし、 m, n の交点を P とし、 P から辺 BC, CA, AB に下ろした垂線の足をそれぞれ S, T, U とする。 P が l 上にあることを示そう。

- [仮定] l が $\angle BAC$ の二等分線……………①
 m が $\angle ABC$ の二等分線……………②
 n が $\angle BCA$ の二等分線……………③
 $PS \perp BC$ ……………④
 $PT \perp CA$ ……………⑤
 $PU \perp AB$ ……………⑥

[結論] l, m, n は1点 P で交わる

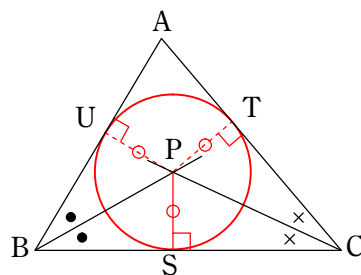


- [証明] $\triangle BPS$ と $\triangle BPU$ において、
 ②より、 $\angle PBS = \angle PBU$ ……………⑦
 ④⑥より、 $\angle PSB = \angle PUB (= 90^\circ)$ ……………⑧
 また、 BP 共通……………⑨
 ⑦⑧⑨より、 $\triangle BPS \equiv \triangle BPU$ (二角一对辺相等)
 よって、 $PS = PU$ (対応辺)……………⑩
 $\triangle CPS$ と $\triangle CPT$ において、
 ③より、 $\angle PCS = \angle PCT$ ……………⑪
 ④⑤より、 $\angle PSC = \angle PTC (= 90^\circ)$ ……………⑫
 また、 CP 共通……………⑬
 ⑪⑫⑬より、 $\triangle CPS \equiv \triangle CPT$ (二角一对辺相等)
 よって、 $PS = PT$ (対応辺)……………⑭
 $\triangle APT$ と $\triangle APU$ において、
 ⑩⑭より、 $PT = PU$ ……………⑮
 ⑤⑥より、 $\angle PTA = \angle PUA = 90^\circ$ ……………⑯
 また、 AP 共通……………⑰
 ⑮⑯⑰より、 $\triangle APT \equiv \triangle APU$ (斜辺一辺相等)
 よって、 $\angle PAT = \angle PAU$ (対応角)
 なので、①より、 P は $\angle BAC$ の二等分線 l 上にある。
 すなわち、 $\angle A, \angle B, \angle C$ の二等分線 l, m, n は、1点 P で交わる。 (q.e.d.)

(2)

(1)の点 P は、 $PS = PT = PU$ をみたす点なので、点 P を中心として半径 PS の円を描くと、その円 P は S, T, U を通る。④⑤⑥より、3辺 BC, CA, AB はこの円の接線となるので、円 P は $\triangle ABC$ の内接円になる。

したがって、 $\triangle ABC$ の内接円は、
 三角形の2つの内角それぞれの二等分線を作図し、
 その交点を中心とし、交点からどれか1つの辺に下ろした垂線の足までの長さを半径とする円を描くと、
 作図できる。



問2.2

円Iに対して、辺AB, ACは円外の点Aから引いた2本の接線なので、 $AS = AU$ が成り立つ。

同様に、 $BT = BS, CU = CT$ も成り立つので、辺BC, CA, ABの長さが7, 6, 5であることに注目して、連立方程式

$$\begin{cases} y+z=7 & \dots\dots ① \\ x+z=6 & \dots\dots ② \\ x+y=5 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

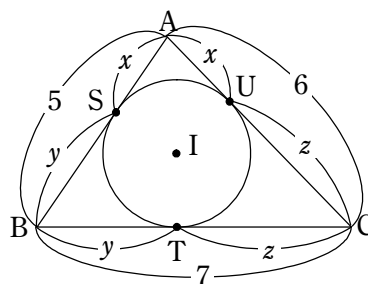
が得られる。

①+②+③より、

$$2x+2y+2z=18$$

$$\therefore x+y+z=9 \dots\dots\dots ④$$

$$④-①, ④-②, ④-③ \text{ より、 } \boxed{x=2, y=3, z=4}$$



問2.3

(方法1)

$IS \perp AB, IT \perp BC$ (円の接線の性質) と、 $\angle SBT = 90^\circ$ から、四角形BSITは長方形となる。よって、円Iの半径ITはBSの長さに等しいので、あとは、問2.2の要領で、BSの長さを求めればよい。

円Iに対して、辺AB, ACは円外の点Aから引いた2本の接線なので、 $AS = AU (=x \text{ とする})$ が成り立つ。同様に、

$BT = BS (=y \text{ とする}), CU = CT (=z \text{ とする})$ も成り立つので、

辺BC, CA, ABの長さが5, 13, 12であることに注目して、連立方程式

$$\begin{cases} y+z=5 & \dots\dots ① \\ x+z=13 & \dots\dots ② \\ x+y=12 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

が得られる。

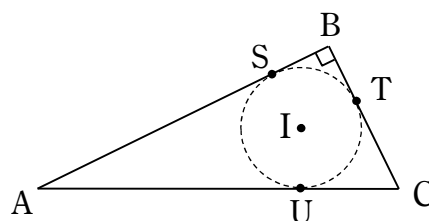
①+②+③より、

$$2x+2y+2z=30$$

$$\therefore x+y+z=15 \dots\dots\dots ④$$

$$④-② \text{ より、 } y=2$$

これより、円Iの半径も $\boxed{2}$ である。



(方法2)

面積を考えると、 $\triangle ABC = \triangle IAB + \triangle IBC + \triangle ICA$ なので、

$$\frac{AB \times BC}{2} = \frac{AB \times IS}{2} + \frac{BC \times IT}{2} + \frac{CA \times IU}{2} \dots\dots\dots ⑤$$

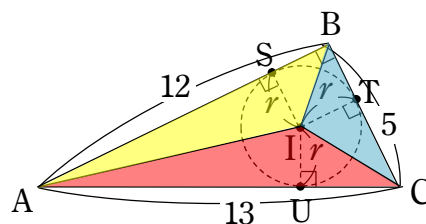
ここで、円Iの半径を r とすると、 $IS = IT = IU = r$

また、 $AB = 12, BC = 5, CA = 13$ なので、これらを⑤に代入すると、

$$\frac{12 \times 5}{2} = \frac{12 \times r}{2} + \frac{5 \times r}{2} + \frac{13 \times r}{2}$$

$$30 = 15r$$

$$\therefore r = \boxed{2}$$



問2.4

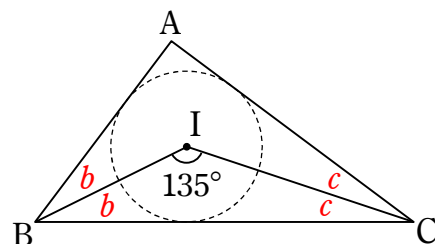
(1)

BI, CI は、それぞれ $\angle ABC$, $\angle ACB$ の二等分線なので、
 $\angle ABI = \angle CBI = b$, $\angle ACI = \angle BCI = c$ とおける。

$\triangle IBC$ の内角和を考えると、 $b + c = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ ①

$\triangle ABC$ の内角和を考えると、 $\angle BAC = 180^\circ - 2(b + c)$ ②

①を②に代入して、 $\angle BAC = 180^\circ - 2 \times 45^\circ = \boxed{90^\circ}$



(2)

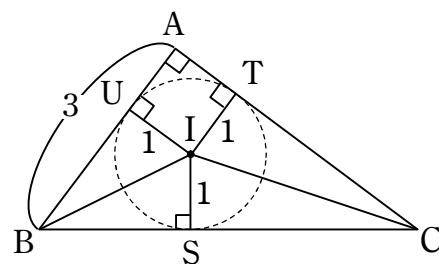
内接円 I と辺 BC, CA, AB の接点をそれぞれ S, T, U とおく。

内接円の半径は 1 だから、 $IS = IT = IU = 1$ ③

$IT \perp CA$, $IU \perp AB$ (円の接線の性質) と $\angle BAC = 90^\circ$ ((1)より) から、

$ATI U$ は長方形であり、さらに、③より $IT = IU$ なので、

$ATI U$ は正方形④

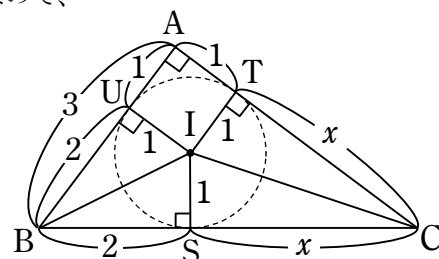


ここで円 I に対して、辺 BA, BC は円外の点 B から引いた 2 本の接線なので、

$BS = BU$ ⑤

同様に、 $CS = CT$ ($=x$ とおく)⑥

③④⑤⑥より、各線分の長さが右図ようになる。



面積を考えると、 $\triangle ABC = \triangle IAB + \triangle IBC + \triangle ICA$ なので、

$$\frac{AB \times AC}{2} = \frac{AB \times IU}{2} + \frac{BC \times IS}{2} + \frac{CA \times IT}{2}$$

図の線分の長さを代入して、

$$\frac{3(x+1)}{2} = \frac{3 \times 1}{2} + \frac{(x+2) \times 1}{2} + \frac{(x+1) \times 1}{2}$$

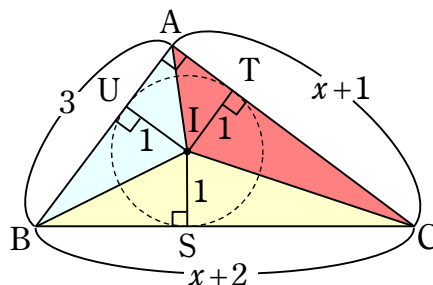
両辺を 2 倍して、

$$3x + 3 = 3 + (x+2) + (x+1)$$

$$3x + 3 = 2x + 6$$

$$3x - 2x = 6 - 3 \quad \therefore x = 3$$

$$\therefore BC = x + 2 = 3 + 2 = \boxed{5}$$



問2.5

(1)

$\triangle ABC$ の内接円 O_1 と CA, AB との接点を S, T とすると、
 $BP=BT (=x$ とおく), $CP=CS (=y$ とおく), $AS=AT (=z$ とおく)
 である。 x, y, z の連立方程式を立式すると、

$$\begin{cases} x+y = a & \dots\dots ① \\ y+z = b & \dots\dots ② \\ x+z = c & \dots\dots ③ \end{cases}$$

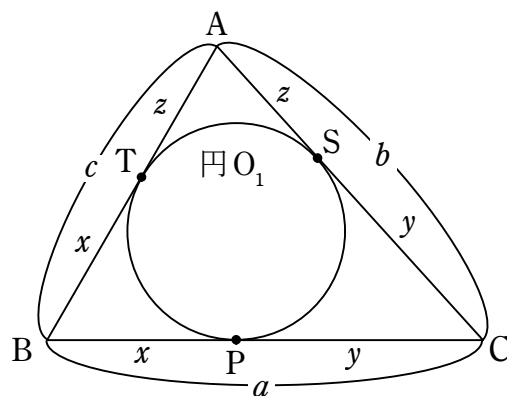
なので、これを解いて x を a, b, c の式で表す。

①+②+③ より、 $2x+2y+2z=a+b+c$

$$\therefore x+y+z = \frac{a+b+c}{2} \quad \dots\dots ④$$

$$④-② \text{ より、 } BP=x = \frac{a-b+c}{2}$$

ちなみに、④-③ より、 $y = \frac{a+b-c}{2}$ ④-① より、 $z = \frac{-a+b+c}{2}$ である。



(2)

$\triangle ABP$ の内接円 O_2 と AB, BP との接点を U, V とすると、
 $AQ=AU (=X$ とおく), $BU=BV (=Y$ とおく), $PQ=PV (=Z$ とおく)
 である。

$AB=c, BP=x, AP=p$ に対して、 X, Y, Z の連立方程式を立式すると、

$$\begin{cases} X+Y = c & \dots\dots ⑤ \\ Y+Z = x & \dots\dots ⑥ \\ X+Z = p & \dots\dots ⑦ \end{cases}$$

なので、これを解いて X を c, p, x の式で表す。

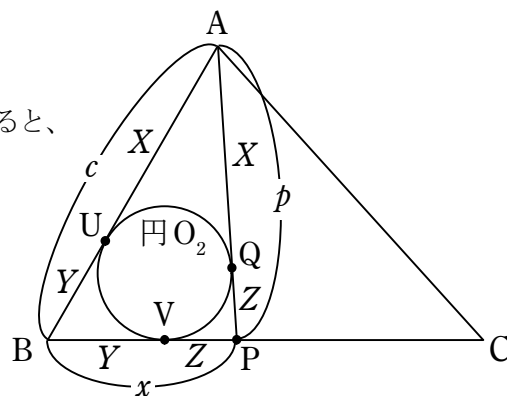
⑤+⑥+⑦ より、 $2X+2Y+2Z=c+p+x$

$$\therefore X+Y+Z = \frac{c+p+x}{2} \quad \dots\dots ⑧$$

$$⑧-⑥ \text{ より、 } X = \frac{c+p-x}{2}$$

(1)より $x = \frac{a-b+c}{2}$ なので、

$$AQ=X = \frac{c+p}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{a-b+c}{2} = \frac{2c+2p-a-b-c}{4} = \frac{2p-a+b+c}{4}$$



(3)

$\triangle ACP$ で、(2)と同様に計算すると、

$$AR = \frac{b+p-y}{2} = \frac{b+p}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{a+b-c}{2} = \frac{2b+2p-a-b+c}{4} = \frac{2p-a+b+c}{4}$$

となるので、 $AQ=AR$ とわかる。

したがって、点 Q と R は一致する。

