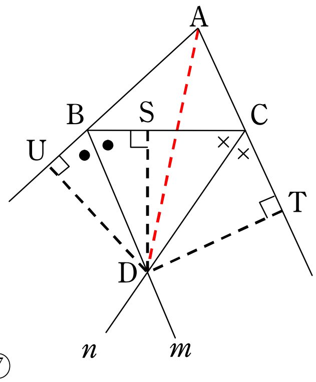
中1数学B　冬期§3　傍接円　本問解答

※　欠席してしまった場合は、問 3.1～ 問 3.3 , 問 3.5 を自分で確認し、p.16 の宿題に取り組んで提出してください。余裕があれば全問解きましょう。

問3.1

(1)

△ABC の∠A の二等分線を l 、∠B の外角, ∠C の外角の二等分線をそれぞれ m,n とし、m,n の交点を D とする。l が D を通ることを示そう。D から辺 BC に下ろした垂線の足を S 、D から AC の延長, AB の延長 に下ろした垂線の足をそれぞれ T , U とする。



［仮定］l が∠BAC の二等分線……①

m が∠ABC の外角の二等分線……②

n が∠BCA の外角の二等分線……③

DS⊥BC……④

DT⊥CA……⑤

DU⊥AB……⑥

［結論］l,m,n は 1 点 D で交わる

［証明］△BDS と△BDU において、

②より、∠DBS=∠DBU……⑦

④⑥より、∠DSB=∠DUB（＝90°）……⑧

また、BD 共通……⑨

⑦⑧⑨より、△BDS≡△BDU（二角一対辺相等）

よって、DS=DU（対応辺）……⑩

△CDS と△CDT において、

③より、∠DCS=∠DCT……⑪

④⑤より、∠DSC=∠DTC（＝90°）……⑫

また、CD 共通……⑬

⑪⑫⑬より、△CDS≡△CDT（二角一対辺相等）

よって、DS=DT（対応辺）……⑭

△ADT と△ADU において、

⑩⑭より、DT=DU……⑮

⑤⑥より、∠DTA=∠DUA=90°……⑯

また、AD 共通……⑰

⑮⑯⑰より、△ADT≡△ADU（斜辺一辺相等）

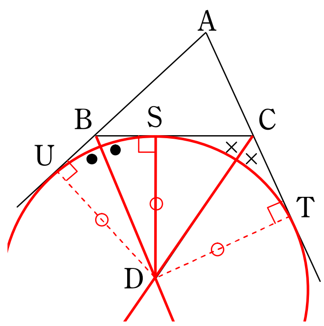
よって、∠DAT=∠DAU（対応角）

なので、①より、D は∠BAC の二等分線 l 上にある。

すなわち、∠A, ∠B の外角, ∠C の外角　の二等分線 l,m,n　は、1 点 D で交わる。　(q.e.d.)

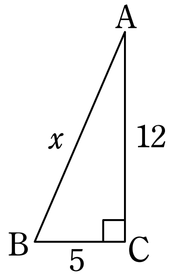
(2)

(1)の点 D は、DS=DT=DU をみたす点なので、
点 D を中心として半径 DS の円を描くと、
その円は S , T , U を通る。
④⑤⑥より、直線 BC, CA, AB　はそれぞれこの円の接線となるので、
円 D は△ABC の傍接円になる。
したがって、△ABC の傍接円は、
三角形の 2 つの外角それぞれの二等分線を作図し、
その交点を中心とし、交点からどれか 1 つの辺または辺の延長に
下ろした垂線の足までの長さを半径とする円を描くと、作図できる。



問3.2

(1)



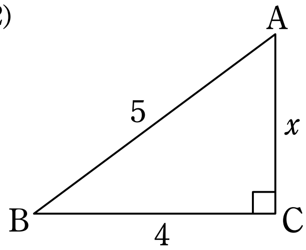
ピタゴラスの定理より、

$x^2 = 5^2 + 12^2$

$= 25 + 144 = 169$

$\therefore \quad x = \boxed{13}\ (>0)$

(2)



ピタゴラスの定理より、

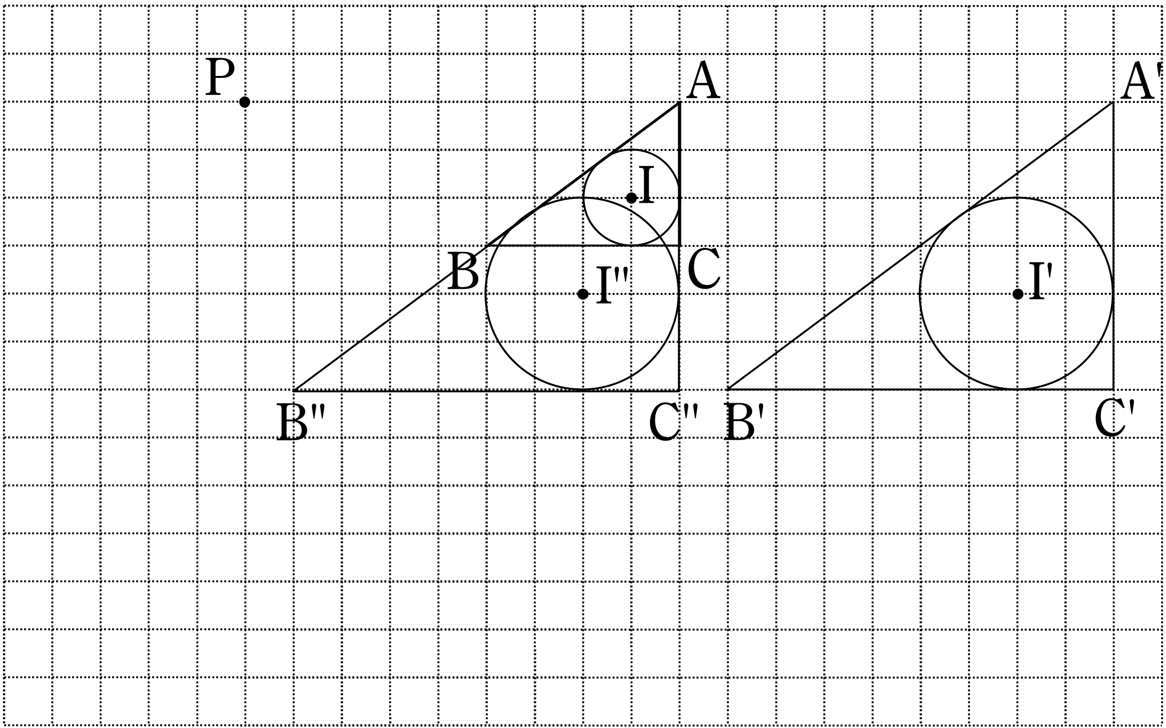
$x^2 + 4^2 = 5^2$

$x^2 = 25 - 16 = 9$

$\therefore \quad x = \boxed{3}\ (>0)$

問3.3

△ABC と円 I を、点 P を中心に 2 倍に相似拡大したものが△A'B'C' と円 I' で、点 A を中心に 2 倍に相似拡大したものが△AB"C" と円 I" である。



問3.4

点 O を中心とする相似拡大を考えると、

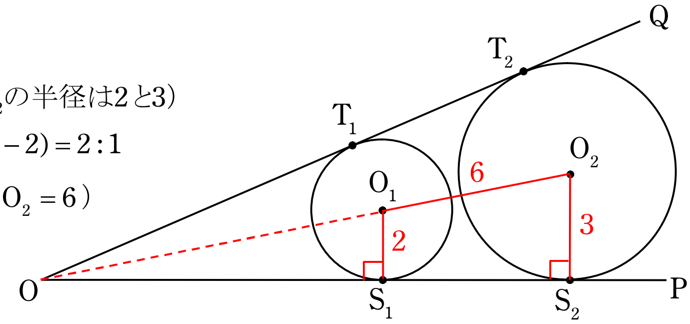
$\triangle OO_2S_2$ は、$\triangle OO_1S_1$ の相似拡大なので、

$OO_1 : OO_2 = O_1S_1 : O_2S_2$ （対応辺の比）

$= 2:3$ （仮定より、2 円O_1, O_2の半径は2と3）

よって、$OO_1 : O_1O_2 = OO_1 : (OO_2 - OO_1) = 2 : (3-2) = 2:1$

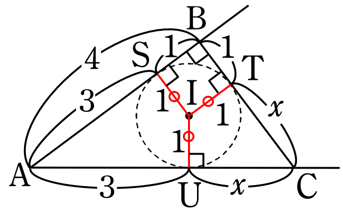
$\therefore \quad OO_1 = 2\,O_1O_2 = 2 \times 6 = \boxed{12}$ （仮定より、$O_1O_2 = 6$）



問3.5

(1)

内接円 I と辺 AB, BC, CA の接点をそれぞれ S, T, U とおく。



内接円の半径は 1 なので、IS=IT=IU=1……①

BSIT は正方形なので、BS=BT=1……②

仮定より、AB=4……③

②③より、AS= AB − BS = 4 − 1 = 3 ……④

ここで円 I に対して、辺 AB, AC は円外の点 A から引いた 2 本の接線なので、

AU=AS=3（④より）……⑤

同様にして、CU=CT（=x とおく）……⑥

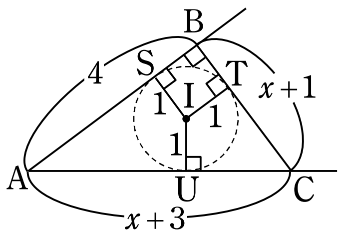
⑤⑥より、AC= $3+x$ ……⑦

②⑥より、BC= $1+x$ ……⑧

(解 1)

面積を考えると、△ABC=△IAB+△IBC+△ICA なので、$\dfrac{\mathrm{AB}\times\mathrm{BC}}{2}=\dfrac{\mathrm{AB}\times\mathrm{IS}}{2}+\dfrac{\mathrm{BC}\times\mathrm{IT}}{2}+\dfrac{\mathrm{CA}\times\mathrm{IU}}{2}$

①③⑦⑧を代入すると、$\dfrac{4(x+1)}{2}=\dfrac{4\times1}{2}+\dfrac{(x+1)\times1}{2}+\dfrac{(x+3)\times1}{2}$



両辺を 2 倍して、$4x+4=4+(x+1)+(x+3)$

$4x+4=2x+8 \qquad 2x=4 \quad \therefore x=2$

BC= $x+1=2+1=\boxed{3}$

(解 2)

△ABC でピタゴラスの定理を使うと $\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2=\mathrm{AC}^2$

③⑦⑧を代入すると、$4^2+(1+x)^2=(3+x)^2$

$16+(1+x)(1+x)=(3+x)(3+x)$

$16+1+2x+x^2=9+6x+x^2$

$17+2x=9+6x \qquad 8=4x \quad \therefore x=2$

BC= $x+1=2+1=\boxed{3}$

(2)

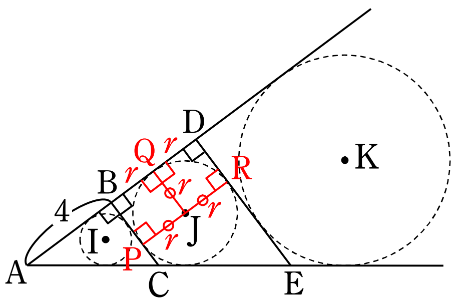
円 J は△ADE の内接円である。円 J と BC, BD, DE の接点をそれぞれ P, Q, R とおく。

円 J の半径を r とおくと、DRJQ, BPJQ は正方形なので、

BD=BQ+DQ=2 JQ=2 r

△ADE は△ABC の点 A を中心とする相似拡大であり、

その相似比は、内接円 I, J の半径の比 $1:r$ になる。



したがって、

$\mathrm{AB}:\mathrm{AD}=1:r$

$4:(4+2r)=1:r$

$4r=4+2r$

$2r=4 \quad \therefore r=2$

よって、

$\mathrm{BC}:\mathrm{DE}=1:r$

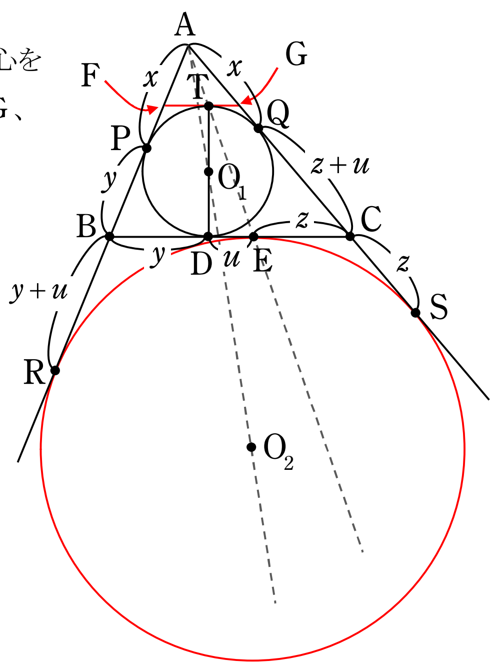
$3:\mathrm{DE}=1:2$

$\therefore \boxed{\mathrm{DE}=6}$

(3)
円 J と円 K は、それぞれ△ABC と△ADE の傍接円であり、
△ADE と円 K は、△ABC と円 J の点 A を中心とする相似拡大である。
したがって、円 K の半径を y とおくと、
その相似比は、傍接円 J, K の半径の比 $2:y$ になる。
よって、
$\mathrm{BC}:\mathrm{DE}=2:y$
$3:6=2:y$
$y=4$
$\therefore$ $\boxed{円Kの半径は4}$

問3.6

［証明］



△ABC の内接円の中心を O_1 、△ABC の辺 BC に接する傍接円の中心を O_2 とし、T における円 O_1 の接線と AB, AC との交点をそれぞれ F, G 、円 O_1, O_2 と直線 AB との接点をそれぞれ P, R 、円 O_1, O_2 と直線 AC との接点をそれぞれ Q, S とする。

BC, FG は、接点 D,T における円 O_1 の接線なので、
直径 DT⊥BC, DT⊥FG、よって、FG // BC である。

FG // BC より $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AF}}=\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AG}}$ なので、
△ABC は、△AFG の A を中心とする $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AF}}$ 倍の相似拡大であり、
△ABC の辺 BC に接する傍接円 O_2 は、△AFG の辺 FG に接する
傍接円 O_1 の A を中心とする $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AF}}$ 倍の相似拡大である。

したがって、T が円 O_1 と FG の接点であり、E が直線 AT 上にあることから、E が円 O_2 と BC の接点であることがわかる。

すると、円外の点から円に引いた 2 本の接線の性質より、AP=AQ（=x とおく）、BP=BD（=y とおく）、CE=CS（=z とおく）である。

さらに、DE=u とおくと、円外の点から円に引いた 2 本の接線の性質より、
BR=BE=BD+DE=$y+u$, CQ=CD=CE+ED=$z+u$ である。

ここで、AR=AS より、$x+y+(y+u)=x+(z+u)+z$ なので、$2y=2z$　$\therefore y=z$
よって、BD=CE である。　(q.e.d.)