

中1数学B 冬期 §4 重心・垂心の存在 本問解答

※ 欠席してしまった場合は、問4.1を自分で確認してください。余裕があれば全問解きましょう。

問4.1

(1)

[証明 1]

AL に対して、BM との交点 P を考えると、

M, L が AC, BC の中点なので、中点連結定理より、

AB : ML = 2 : 1 ①

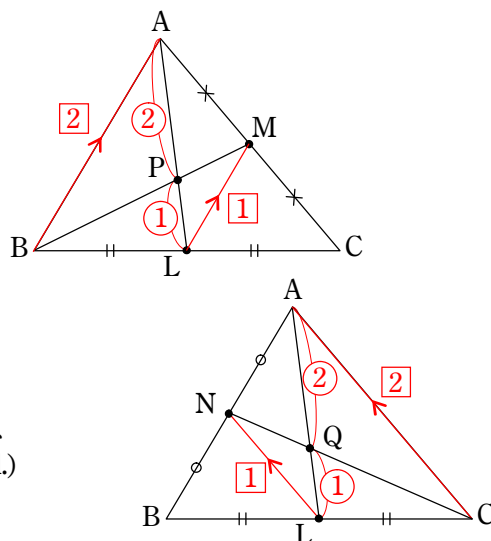
AB // ML ②

①②より、AP : PL = 2 : 1 (平行線と比の定理) ③

AL に対して、CN との交点 Q を考えると、

同様に、AQ : QL = 2 : 1 ④

③④より、P と Q は AL を 2 : 1 に内分する点なので一致し、
3 本の中線 AL, BM, CN は 1 点 P で交わる。 (q.e.d.)



[証明 2]

AL と BM の交点を P とし、CP の延長線と AB との交点を Q とする。

L が BC の中点なので、 $\triangle ABP : \triangle ACP = BL : CL = 1 : 1$ ⑤

M が AC の中点なので、 $\triangle ABP : \triangle CBP = AM : CM = 1 : 1$ ⑥

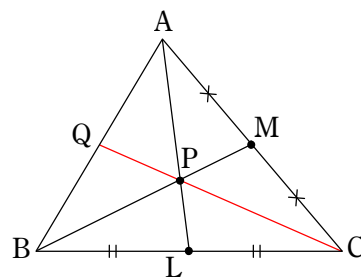
⑤⑥より、 $\triangle ACP : \triangle BCP = 1 : 1$ ⑦

ここで、 $AQ : BQ = \triangle ACP : \triangle BCP$ ⑧

⑦⑧より、 $AQ : BQ = 1 : 1$ 、すなわち、 $AQ = BQ$

よって、CQ は中線 CN と一致するので、

3 本の中線 AL, BM, CN は 1 点 P で交わる。 (q.e.d.)



(2)

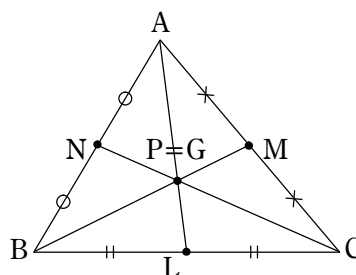
[証明]

3 本の中線の交点を G とおくと、

(1)の [証明 1] のなかで $P = G$ として、 $AG : GL = 2 : 1$

他の中線 BM, CN でも同様なので、

G は中線 AL, BM, CN を 2 : 1 に内分する。 (q.e.d.)



(3)[#] 三角形の厚紙で実験してみよう。

問4.2

[仮定] 3 円 O_1, O_2, O_3 の半径が等しい.....①

(1)(2)は、H3.2 と同様なので、証明の方針だけを書いておきます。詳しくは、H3.2 の解答を参照してください。

(1)

[結論] $AP \perp BC$

[証明の方針]

H3.2 と同様に、

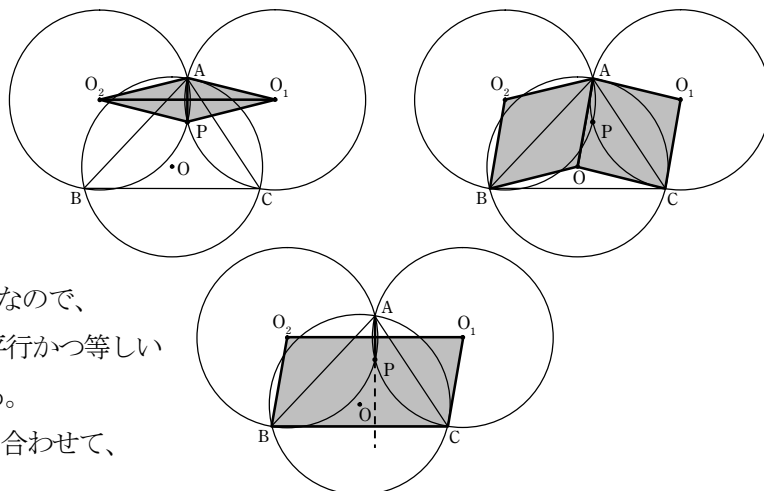
①より、四角形 AO_1PO_2 はひし形なので、

$AP \perp O_1O_2$

①より、四角形 $AOBO_2, AOCO_1$ はひし形なので、

四角形 BCO_1O_2 の向かい合う 1 組の辺が平行かつ等しいことが示せ、 BCO_1O_2 は平行四辺形である。

よって、 $BC \parallel O_2O_1$ なので、 $AP \perp O_1O_2$ と合わせて、 $AP \perp BC$ である。



(2)

[結論] $BP \perp AC$

[証明の方針]

(1)と同様に、

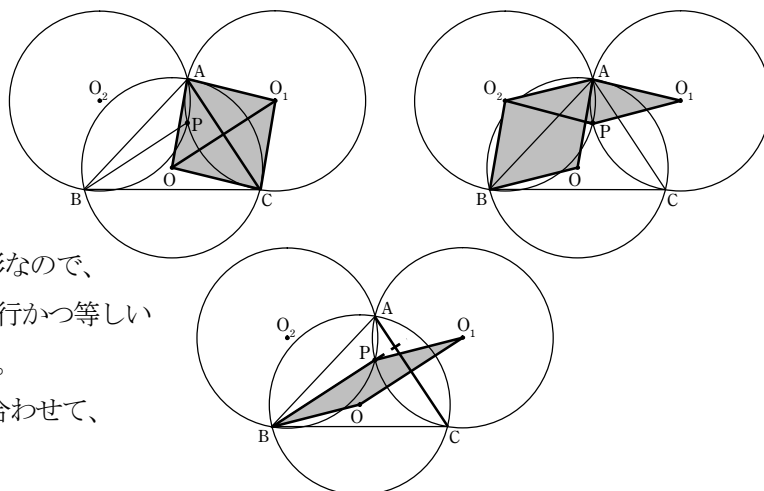
①より、四角形 $AOCO_1$ はひし形なので、

$AC \perp OO_1$

①より、四角形 $AOBO_2, AO_1PO_2$ はひし形なので、

四角形 BOO_1P の向かい合う 1 組の辺が平行かつ等しいことが示せ、 BOO_1P は平行四辺形である。

よって、 $BP \parallel OO_1$ なので、 $AC \perp OO_1$ と合わせて、 $BP \perp AC$ である。



(3)

[証明] (2)と同様にして、 $CP \perp AB$ もいえるので、(1)(2)の結果と合わせると、

3 辺 AB, BC, CA への 3 本の垂線 CP, AP, BP は、1 点 P (垂心という) で交わるとわかる。 (q.e.d.)

(4)

[証明] 円 O の弧 AB を辺 AB に対して折り返した弧が円 O_2 の弧 AB 、

円 O の弧 AC を辺 AC に対して折り返した弧が円 O_1 の弧 AC で、

(3)の結果から、その交点 P が $\triangle ABC$ の垂心である。

したがって、 $\triangle ABC$ の外接円の弧 AB, BC を辺 AB, AC に対して折り返した弧の交点 P は $\triangle ABC$ の垂心である。

同様に、 $\triangle ABC$ の外接円の弧 BC, CA を辺 BC, CA に対して

折り返した弧の交点も $\triangle ABC$ の垂心なので、その交点は P である。

したがって、外接円を各辺に対して折り返した弧 AB, BC, CA は、一点 P で交わる

(q.e.d.)

