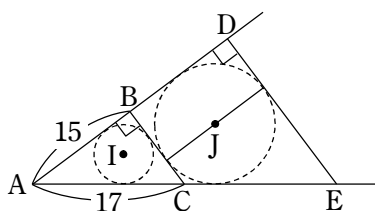


中1数学B 2019年度 冬期 三角形の五心 宿題解答

§3 傍接円

H3.1



- (1) まず、 $\triangle ABC$ でピタゴラスの定理より

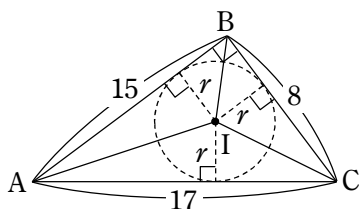
$$15^2 + BC^2 = 17^2$$

なので、

$$BC^2 = 17^2 - 15^2 = 289 - 225 = 64$$

$$\therefore BC = 8 (>0)$$

内接円の半径を利用して $\triangle ABC$ の面積を表すと



$$\triangle ABC$$

$$= \triangle IAB + \triangle IBC + \triangle ICA$$

$$= \frac{1}{2} \times 15 \times r + \frac{1}{2} \times 8 \times r + \frac{1}{2} \times 17 \times r$$

$$= \frac{1}{2} \times (15 + 8 + 17) \times r = 20r$$

一方、

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times AB \times BC = \frac{1}{2} \times 15 \times 8 = 60$$

なので、

$$20r = 60 \quad \therefore r = \boxed{3}$$

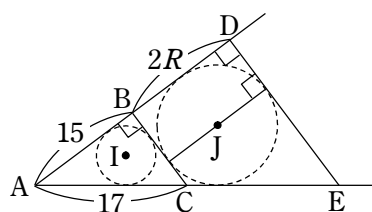
- (2) $\triangle ADE$ は、 $\triangle ABC$ を、点 A を中心として相似拡大したものになっている。この拡大によって、 $\triangle ABC$ の内接円 I は、 $\triangle ADE$ の内接円 J に相似拡大される。このことを利用して考えよう。

$\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ の相似比は、

$$AB : AD = AB : (AB + BD)$$

$$= 15 : (15 + 2R) \dots\dots\dots ①$$

(BD は円 J の直径と等しいことに注意)



円 I と円 J の相似比は半径の比に等しく、

$$r : R = 3 : R \dots\dots\dots ②$$

①, ②は等しいので

$$15 : (15 + 2R) = 3 : R$$

$$15R = 45 + 6R$$

$$9R = 45 \quad \therefore R = \boxed{5}$$

- (3) $\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ 、円 I と円 J の相似比が等しいことから、

$$BC : DE = r : R \quad \therefore 8 : DE = 3 : 5$$

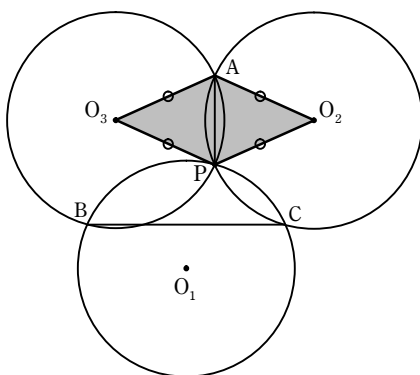
$$\text{したがって、} DE = 8 \times \frac{5}{3} = \boxed{\frac{40}{3}}$$

H3.2

[仮定]

3 円 O_1, O_2, O_3 の半径が等しい..... ①

(1) [結論] $AP \perp O_2O_3$



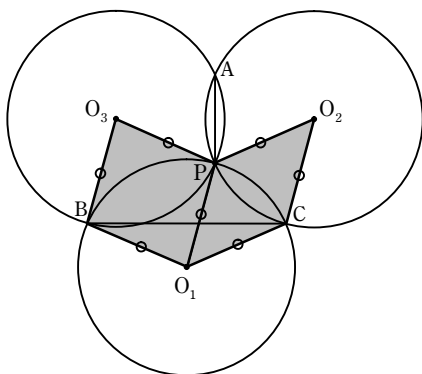
[証明]

①より、 $O_2A = O_2P = O_3A = O_3P$ なので、
四角形 AO_2PO_3 は、ひし形である。

よって、その対角線は直交し、 $AP \perp O_2O_3$

(q.e.d.)

(2) [結論] BCO_2O_3 が平行四辺形



[証明]

まず①より、 $BO_3 = CO_2$ ②

また、①より、 $O_1B = O_1P = O_3B = O_3P$ なので、
四角形 BO_1PO_3 は、ひし形であり、

よって、 $BO_3 \parallel O_1P$ ③

①より、 $O_1C = O_1P = O_2C = O_2P$ なので、
四角形 CO_1PO_2 は、ひし形であり、

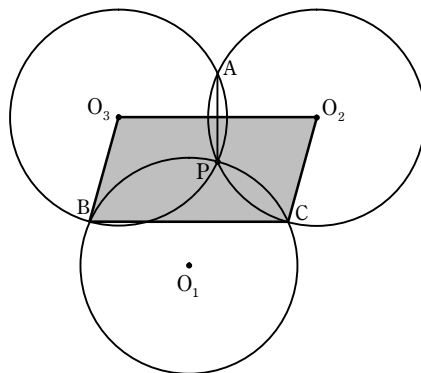
よって、 $CO_2 \parallel O_1P$ ④

③④より、 $BO_3 \parallel CO_2$ ⑤

②⑤より、向かい合う 1 組の辺が平行かつ
等しいので、四角形 BCO_2O_3 は平行四辺形
である。

(q.e.d.)

(3) [結論] $AP \perp BC$



[証明]

(2)より、四角形 BCO_2O_3 は平行四辺形

なので、 $BC \parallel O_3O_2$ ⑥

(1)より、 $AP \perp O_2O_3$ ⑦

⑥⑦より、 $AP \perp BC$ である。

(q.e.d.)