中2数学B 2019年度1学期 本問解答
§3 完全平方形

※ 欠席してしまった場合は、問 3.1, 問 3.2, 問 3.5～問 3.9 を（余裕があれば問 3.3, 問 3.4 も）自分で確認し、p.18, p.19 の宿題 H3.1～H3.5 に取り組んで提出してください。

問3.1

(1) $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=\boxed{a^2+2ab+b^2}$

(2) $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=\boxed{a^2-2ab+b^2}$

(1)の b を $-b$ で置き替えたと考えてもよい。

問3.2

(1) $(x+3y)^2=x^2+2\cdot x\cdot 3y+(3y)^2=\boxed{x^2+6xy+9y^2}$

(2) $(3x-2)^2=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 2+2^2=\boxed{9x^2-12x+4}$

(3) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=3+2\sqrt{6}+2=\boxed{5+2\sqrt{6}}$

(4) $\left(3-\sqrt{5}\right)^2=3^2-2\cdot 3\cdot\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2=9-6\sqrt{5}+5=\boxed{14-6\sqrt{5}}$

問3.3

少し見通しよく、一般化して比較してみよう。正の数aに対し、

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+3}\right)^2 &= a+2\sqrt{a(a+3)}+a+3\\ &= 2a+3+2\sqrt{a^2+3a},\\ \left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a+2}\right)^2 &= a+1+2\sqrt{(a+1)(a+2)}+a+2\\ &= 2a+3+2\sqrt{a^2+3a+2}\end{aligned}$$

より、

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+3}\right)^2<\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a+2}\right)^2$$

である。$\sqrt{a}+\sqrt{a+3},\ \sqrt{a+1}+\sqrt{a+2}$ は正なので、2 乗しても大小関係は変わらないから、

$$\sqrt{a}+\sqrt{a+3}<\sqrt{a+1}+\sqrt{a+2}$$

と分かる。

$a=2345$ を代入して、

$$\boxed{\sqrt{2345}+\sqrt{2348}<\sqrt{2346}+\sqrt{2347}}$$

問3.4

(1) 3 つとも正の数なので 2 乗しても大小関係は変わらない。

$$\begin{aligned}&(n+1)^2=n^2+2n+1,\\ &(n+2)^2=n^2+4n+4,\\ &\left(\sqrt{n^2+4n}\right)^2=n^2+4n=(n^2+2n)+2n\end{aligned}$$

で、$n\geqq 1$ だから、

$$(n+1)^2<\left(\sqrt{n^2+4n}\right)^2<(n+2)^2$$

である。したがって、

$$\boxed{n+1<\sqrt{n^2+4n}<n+2}$$

(2) (1)より、$\sqrt{n^2+4n}=\sqrt{n(n+4)}$ は、連続する 2 つの自然数の間にあるので整数ではない。ゆえに、差が 4 の自然数の積の正の平方根$\sqrt{1\times5}$, $\sqrt{2\times6}$, $\sqrt{3\times7}$, $\cdots$ の中に整数になるものはない。

問3.5

(1) $5^2=25,\ 15^2=225,\ 25^2=625,\ 35^2=1225,\ \cdots$

より、下1桁が5の自然数 N に対し、N^2 の下2桁は25であると予想される。

(2) 下1桁が5の自然数 N は、

$$N=10m+5 \qquad (m \text{は0以上の整数})$$

と表せる。これより、

$$\begin{aligned} N^2 &= (10m+5)^2 \\ &= (10m)^2+2\times 10m\times 5+5^2 \\ &= 100m^2+100m+25 \\ &= 100(m^2+m)+25 \end{aligned}$$

となる。m^2+m は0以上の整数だから、$100(m^2+m)$ は0以上の100の倍数となり、N^2 の下2桁が25であることが分かった。

問3.6

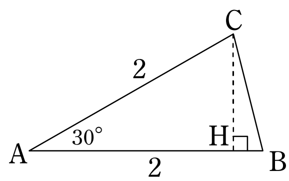
(1) $x^2+2x+1=x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2=\boxed{(x+1)^2}$

(2) $4x^2-20x+25=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 5+5^2=\boxed{(2x-5)^2}$

問3.7

(1) $\triangle$ACH は30°, 60°, 90°の直角三角形だから、

$$\mathrm{AH}=\mathrm{AC}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3},\quad \mathrm{CH}=\mathrm{AC}\times\frac{1}{2}=1$$



したがって、

$$\mathrm{BH}=\mathrm{AB}-\mathrm{AH}=\boxed{2-\sqrt{3}}$$

(2) $\triangle$BCH にピタゴラスの定理を用いると、(1)および $\mathrm{CH}=\mathrm{AC}\times\frac{1}{2}=1$ より、

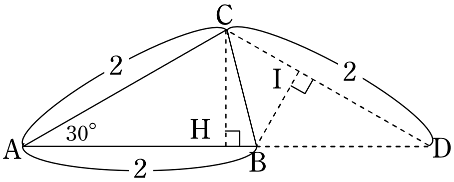
$$\begin{aligned} \mathrm{BC}^2 &= \mathrm{BH}^2+\mathrm{CH}^2 \\ &= \left(2-\sqrt{3}\right)^2+1^2=2^2-4\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2+1=8-4\sqrt{3} \end{aligned}$$

したがって、

$$\mathrm{BC}=\boxed{\sqrt{8-4\sqrt{3}}}$$

問3.8

(1) $CA = CD$ より、$\angle CDA = \angle CAB = 30°$ だから、



$\triangle DBI$ は $30°, 60°, 90°$ の直角三角形であり、

$BD : BI = 2 : 1$ ……………………………………… ①

また、$AB = AC$ より、

$$\angle ABC = \angle ACB = \frac{180° - \angle BAC}{2} = 75°$$

だから、

$\angle CBI = 180° - \angle ABC - \angle DBI = 180° - 75° - 60° = 45°$

よって、$\triangle CBI$ は直角二等辺三角形であり、

$BI : BC = 1 : \sqrt{2}$ ……………………………………… ②

①, ②より、

$BD : BI : BC = 2 : 1 : \sqrt{2}$, $\quad \therefore BD : BC = \boxed{2 : \sqrt{2}} \left(= \boxed{\sqrt{2} : 1} \right)$

(2) C から AD へ下ろした垂線の足を H とすると、$CA = CD$ より、H は AD の中点と一致する。 $\triangle ACH$ は $30°, 60°, 90°$ の直角三角形となるから、

$$AH = AC \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \quad \therefore AD = 2AH = 2\sqrt{3}$$

したがって、

$BD = AD - AB = 2\sqrt{3} - 2$

これと(1)より、

$$BC = \frac{\sqrt{2}}{2} BD = \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \times \cancel{2}\left(\sqrt{3} - 1\right) = \boxed{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$$

※ 問 3.7 と問 3.8 の結論の見た目は異なるが、

$$\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2 = 6 - 2\sqrt{12} + 2 = 8 - 4\sqrt{3}$$

より、同じ値を表していることが確かめられる。

問3.9

(1) 二重根号が外れて、

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

と表せるとする。

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 + 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 = a+b+2\sqrt{ab}$$

なので、

$$\begin{aligned}\sqrt{5+2\sqrt{6}} &= \sqrt{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2} \\ &= \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}\end{aligned}$$

$$\therefore 5+2\sqrt{6} = a+b+2\sqrt{ab}$$

が成り立つ。そこで、

掛けて　6　足して　5

となる 2 数 a,b を探してみると、3 と 2 が見つかる。よって、

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{3}+\sqrt{2} = 1.7320\cdots + 1.4142\cdots = \boxed{3.14}\cdots$$

(2) 二重根号が外れて、

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

と表せるとする。左辺は正の数なので、$\sqrt{a}-\sqrt{b}$ も正の数であり、

$a > b$ ……………………………………☆

であることに注意する。

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 - 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 = a+b-2\sqrt{ab}$$

なので、

$$\begin{aligned}\sqrt{7-2\times 2\sqrt{3}} &= \sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2} \\ &= \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}\end{aligned}$$

$$\therefore 7-2\sqrt{12} = a+b-2\sqrt{ab}$$

が成り立つ。そこで、

掛けて　12　足して　7

となる 2 数 a,b を探してみると、4 と 3 が見つかる。よって、☆に注意して、

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{4}-\sqrt{3} = 2-\sqrt{3} = 2-1.7320\cdots = \boxed{0.26}\cdots$$