中2数学B 2019年度1学期 本問解答
§4 ピタゴラス数

※ 欠席してしまった場合は、問 4.1, 問 4.2 を（余裕があれば問 4.3, 問 4.4 も）自分で確認し、 p.23 の宿題 H4.1～H4.4 に取り組んで提出してください。

問4.1

(1) $1^2 = 4\times 0 + \underline{\underline{1}}$, $2^2 = 4\times 1 + \underline{\underline{0}}$, $3^2 = 4\times 2 + \underline{\underline{1}}$,

$4^2 = 4\times 4 + \underline{\underline{0}}$, $5^2 = 4\times 6 + \underline{\underline{1}}$, $6^2 = 4\times 9 + \underline{\underline{0}}$, $\cdots$

であり、平方数を 4 で割った余りは 0 か 1 であると予想される。

(2) 偶数 $2m$ (m は整数)の 2 乗は

$$(2m)^2 = 4m^2 \qquad (4\times(\text{整数})\text{ の形})$$

となるから、4 で割った余りは 0 である。

奇数 $2m+1$ (m は整数)の 2 乗は

$$(2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 4(m^2+m)+1 \qquad (4\times(\text{整数})+1\text{ の形})$$

となるから、4 で割った余りは 1 である。

以上より、(1)の予想が正しいことが示された。

(3)
$$\begin{aligned}12345678987654 &= 12345678987600 + 54\\ &= \underbrace{4\times 25}_{100}\times 123456789876 + 54\end{aligned}$$

を 4 で割った余りは、下 2 桁の 54 を 4 で割った余りに等しく、$54 = 4\times 13 + 2$ より、それは 2 である。したがって、(2)より、 $x^2 = 12345678987654$ となる自然数 x は存在しない。

問4.2

(1) $1^2=3\times 0+\underline{\underline{1}}$,　$2^2=3\times 1+\underline{\underline{1}}$,　$3^2=3\times 3+\underline{\underline{0}}$,

$4^2=3\times 5+\underline{\underline{1}}$,　$5^2=3\times 8+\underline{\underline{1}}$,　$6^2=3\times 12+\underline{\underline{0}}$,　$\cdots$

であり、平方数を 3 で割った余りは 0 か 1 であると予想される。

(2) 整数 n は、3 で割った余りで分類して、

$$3m,\quad 3m+1,\quad 3m+2 \qquad (m\text{は整数})$$

のいずれかの形で表せる。

(i) $n=3m$ のとき、

$$n^2=9m^2=3\times 3m^2 \qquad (3\times(\text{整数})\text{の形})$$

となるから、n^2 を 3 で割った余りは 0 である。

(ii) $n=3m+1$ のとき、

$$n^2=(3m+1)^2=9m^2+6m+1=3(3m^2+2m)+1 \qquad (3\times(\text{整数})+1\text{の形})$$

となるから、n^2 を 3 で割った余りは 1 である。

(iii) $n=3m+2$ のとき、

$$\begin{aligned}n^2&=(3m+2)^2=9m^2+12m+4\\&=3\times 3m^2+3\times 4m+3+1=3(3m^2+4m+1)+1 \qquad (3\times(\text{整数})+1\text{の形})\end{aligned}$$

となるから、n^2 を 3 で割った余りは 1 である。

以上より、(1)の予想が正しいことが示された。

(3) $2436236=3\times 812078+2$ を 3 で割った余りは 2 である。したがって、(2)より、$x^2=2436236$ となる自然数 x は存在しない。

※ 自然数を 3 で割った余りは、各位の数の和を 3 で割った余りに等しい。

このことを使えば、

(2436236 を 3で割った余り）$=(\underline{2+4}+\underline{3}+\underline{6}+2+\underline{3}+\underline{6}$ を 3で割った余り)

(下線部はそれぞれ 3 の倍数とすぐわかるので)

$=2$

と、商を求めずに余りだけ計算できる。

破線部を証明しよう。何桁でも同様なので 4 桁の自然数（千の位、百の位、十の位、一の位をそれぞれ a,b,c,d とする）について説明する：

$$\begin{aligned}1000a+100b+10c+d&=999a+99b+9c+a+b+c+d\\&=\underline{3\times(333a+33b+3c)}+a+b+c+d\end{aligned}$$

で、$333a+33b+3c$ が整数だから、下線部は 3 で割り切れる。したがって、$1000a+100b+10c+d$ を 3 で割った余りは各位の数の和 $a+b+c+d$ を 3 で割った余りと等しい。

問4.3

2 つの奇数 a, b の平方数の和 a^2+b^2 が、平方数 c^2 であったとする：

$$a^2+b^2=c^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

問 4.1 より、a^2, b^2 のそれぞれを 4 で割った余りは 1 になるから、a^2+b^2 を 4 で割った余りは $1+1=2$ となる。ところが、再び問 4.1 より、c^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 しかあり得ないから、これは①の等式が成り立つことに矛盾する。したがって、2 つの奇数の平方数の和が平方数になることはない。

問4.4

(1) いろんなことが予想できるが、ここでは

(a,b,c) がピタゴラス数ならば、

a, b の少なくとも一方は 3 の倍数 ……………………………………………………………… ①

(a,b,c) がピタゴラス数ならば、

a, b, c のうち少なくとも一つは 5 の倍数 …………………………………………………… ②

を挙げておく。

(2) (1)で挙げた 2 つの予想のうち、①は問 4.3 とほとんど同様に証明できる。(問 4.1 の代わりに問 4.2 を使う。)

②を証明しよう。まず、問 4.1, 問 4.2 同様、平方数を 5 で割った余りについて調べておく。

整数 n は、

$5m,\quad 5m\pm 1,\quad 5m\pm 2$ 　　　(m は整数)

のいずれかの形で表せる。

(i) $n=5m$ のとき、

$$n^2=25m^2=5\times 5m^2$$

となるから、n^2 を 5 で割った余りは 0 である。

(ii) $n=5m\pm 1$ のとき、

$$n^2=(5m\pm 1)^2=25m^2\pm 10m+1=5(5m^2\pm 2m)+1$$

となるから、n^2 を 5 で割った余りは 1 である。

(iii) $n=5m\pm 2$ のとき、

$$n^2=(5m\pm 2)^2=25m^2\pm 20m+4=5(5m^2\pm 4m)+4$$

となるから、n^2 を 5 で割った余りは 4 である。

さて、(a,b,c) がピタゴラス数であるとする：

$a^2+b^2=c^2$ ……………………………………………… ③

ここで a, b, c がどれも 5 の倍数でないと仮定する。すると、a^2, b^2 のそれぞれを 5 で割った余りは 1 または 4 になるから、$1+4=5=5+0,\quad 1+1=2,\quad 4+4=8=5+3$ より、

a^2+b^2 を 5 で割った余りは 0 または 2 または 3

である。ところが、

c^2 を 5 で割った余りは 1 または 4

であるから、これは③の等式が成り立つことに矛盾する。したがって、a, b, c がどれも 5 の倍数でないとした仮定は誤りであって、a, b, c のうち少なくとも 1 つは 5 の倍数である。