

中2数学B 2019年度1学期 本問解答

§6 折り紙で正五角形

※ 欠席してしまった場合は、問 6.1, 問 6.2 を（余裕があれば問 6.3～問 6.5 も）自分で確認しておきましょう。p.31 の宿題 H6.1～H6.5 は、§5 までの復習です。すべて取り組んで提出してください。

問6.1

- (1) $\triangle ABC$ は $AB = AC$ の二等辺三角形なので、

$$\angle ABC = \angle ACB \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

- $\triangle DCA$ は $DA = DC$ の二等辺三角形なので、

$$\angle DCA = \angle DAC \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

- $\triangle ABC$ と $\triangle DCA$ について、①, ②より、

$$\angle ABC = \angle DCA, \angle ACB = \angle DAC$$

だから、二角相等で、

$$\triangle ABC \sim \triangle DCA$$

が成り立つ。よって、対応辺の比を考えて、

$$AB : BC = DC : CA$$

$AD = DC = x$ とおくと、

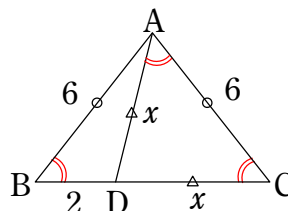
$$6 : (2 + x) = x : 6 \quad (2 + x)x = 36 \quad \therefore x^2 + 2x = 36$$

を得る。これを解くと、

$$x^2 + 2x + 1 = 36 + 1 \quad (x + 1)^2 = 37$$

$$x + 1 = \sqrt{37}, -\sqrt{37} \quad \therefore x = -1 + \sqrt{37}, -1 - \sqrt{37}$$

であるが、 $x > 0$ だから、 $AD = x = \boxed{-1 + \sqrt{37}}$



- (2) $\triangle ABC$ は $AB = AC$ の二等辺三角形なので、

$$\angle ABC = \angle ACB \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

- $\triangle BCD$ は $BC = BD$ の二等辺三角形なので、

$$\angle BCD = \angle BDC \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

- $\triangle ABC$ と $\triangle BCD$ について、①, ②より、

$$\angle ABC = \angle BCD, \angle ACB = \angle BDC$$

だから、二角相等で、

$$\triangle ABC \sim \triangle BCD$$

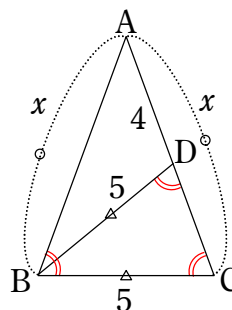
が成り立つ。よって、対応辺の比を考えて、

$$AB : BC = BC : CD$$

$AB = AC = x$ とおくと、

$$x : 5 = 5 : (x - 4) \quad x(x - 4) = 25 \quad \therefore x^2 - 4x = 25$$

を得る。これを解くと、



$$x^2 - 4x + 4 = 25 + 4 \quad (x-2)^2 = 29$$

$$x-2 = \sqrt{29}, -\sqrt{29} \quad \therefore x = 2 + \sqrt{29}, 2 - \sqrt{29}$$

であるが、 $x > 0$ だから、 $AB = x = \boxed{2 + \sqrt{29}}$

問6.2

対角線 AC, BE の交点を F とおく。

$\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDE$, $\triangle DEA$, $\triangle EAB$ は二辺夾角相等で合同なので、対応する辺は等しく、対角線 AC, BD, CE, DA, EB の長さはすべて等しい。

正五角形の一つの内角の大きさは

$$\frac{180^\circ \times 3}{5} = 108^\circ$$

で、正五角形の1つの頂点とその両隣の頂点を結ぶ二等辺三角形の底角の大きさは

$$\frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$$

となる。すると、 $\triangle ABE$ と $\triangle FBA$ はどちらも底角が 36° の二等辺三角形であるから、二角相等で

$$\triangle ABE \sim \triangle FBA \quad \text{..... ①}$$

が成り立つ。よって、対応辺の比を考えて、

$$AB : BE = FB : BA \quad \text{..... ②}$$

ここで、

$$\angle EAF = \angle EAB - \angle FAB = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ,$$

$$\angle EFA = \angle EFB - \angle AFB = \angle EFB - \angle EAB \quad (\text{①の対応角})$$

$$= 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$$

だから、 $\triangle EAF$ は $EF = EA (=1)$ の二等辺三角形である。よって、求める対角線の長さ BE を x とおくと、 $FB = EB - EF = x - 1$ となるから、②より、

$$1 : x = (x-1) : 1$$

$$x(x-1) = 1$$

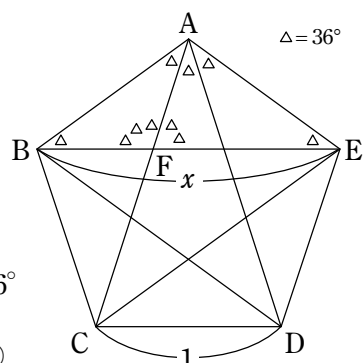
$$\therefore x^2 - x = 1 \quad \text{..... ③}$$

を得る。これを解くと、

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2} \quad \therefore x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$x > 0$ だから、求める対角線の長さは $BE = x = \boxed{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ である。



※ 右図（Gは対角線 AC, BD の交点）に着目して、
 $\triangle ACD \sim \triangle DCG$ （二角相等）

の対応辺の比を考えても

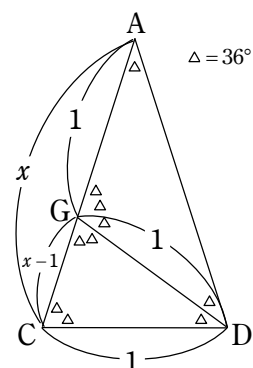
$$AC:CD = DC:CG$$

$$x:1 = 1:(x-1)$$

$$x(x-1) = 1$$

$$\therefore x^2 - x = 1$$

と③と同じ方程式を得る。



問6.3

折り紙の正方形を ABCD とする。

まず、AB と DC が重なるように ABCD を二つに折り、折り目 MN をつける。

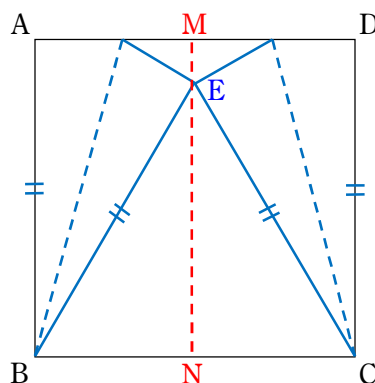
次に、A が折り目 MN 上の点 E にくるように、B を通る直線で折る。MN に関する対称性より、D が折り目 MN 上にくるように、C を通る直線でおれば、D は E に重なる。

すると、EB = AB, CE = CD であるが、ABCD は正方形で AB = BC = CD であることと合わせると、

$$EB = BC = CE$$

と分かる。よって、 $\triangle EBC$ は 3 辺が等しいので正三角形である。

最後に、EB, EC に沿って折り目をつければ、正三角形の折り目が折れたことになる。



問6.4

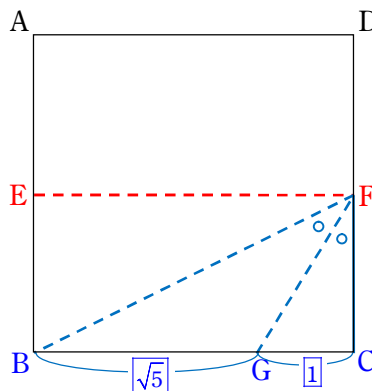
(1) AD と BC が重なるように ABCD を二つに折り、折り目 EF をつける。

さらに、BF に折り目をつけ、CF が BF に重なるように $\triangle BFC$ を折り、折り目 FG をつける。すると、BC:CF = 2:1 なので、ピタゴラスの定理より、

$$BC:CF:BF = 2:1:\sqrt{2^2+1^2}$$

$$\therefore BF:CF = \sqrt{5}:1$$

となっている。

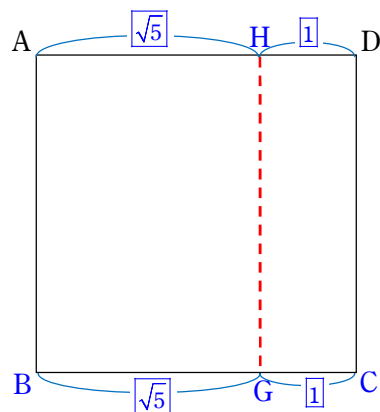


さらに、 $\angle BFG = \angle CFG$ なので、角の 2 等分線と比の定理より、

$$BG : GC = BF : CF = \sqrt{5} : 1$$

が分かる。

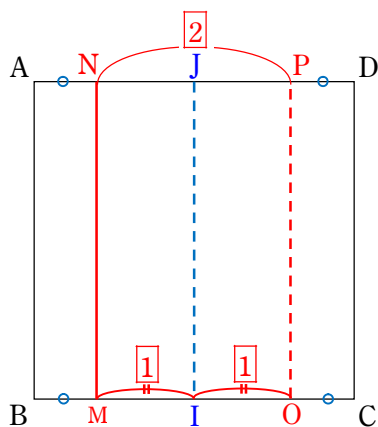
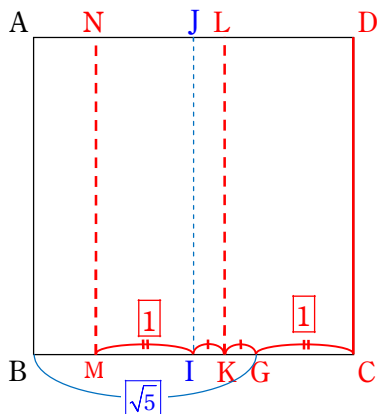
最後に、C が線分 BG 上にくるように、G を通る直線 GH で折れば、これが目標の折り目である。



- (2) まず、AB と DC が重なるように ABCD を折り、折り目 IJ をつける。さらに、G と I が重なるように ABCD を GI の垂直二等分線 KL で折り、KL で折り返した CD に沿って折り目 MN をつける。

次に、IJ で折り返した MN に沿って、折り目 OP をつける。

すると、 $IM = IO$ なので、はじめに与えられた比 $BG : GC = \sqrt{5} : 1$ を考えると、MN, OP が目標の折り目である。

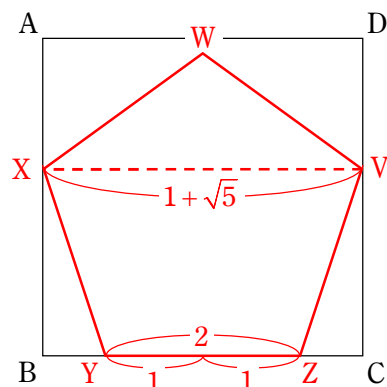


問6.5

問 6.2 より、1 辺の長さが 2 の正五角形の対角線の長さは $1+\sqrt{5}$ になる。

1 辺の長さ $1+\sqrt{5}$ の正方形 ABCD の中に、右図のように正五角形 VWXYZ を折ることにする。正五角形の対角線 XV が正方形の 1 辺と等しくなるので、正五角形の 1 辺の長さは 2 である。

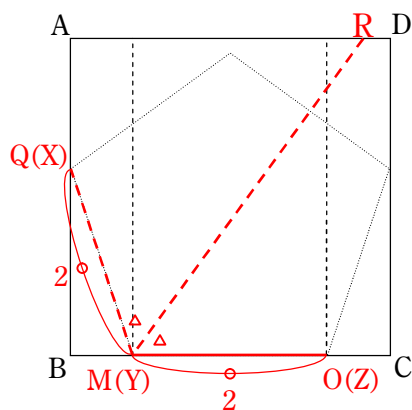
このとき、図の頂点 Y と Z は、BC の中点から 1 だけ離れた点になっている。したがって、問 6.4 の手順で折り目をつけていけば、点 M と点 O がそれぞれ、目標の正五角形の 2 つの頂点 Y と Z に他ならない。(YZ は正五角形の 1 辺目である。)
以下、点は問 6.4 と同じようにとる。



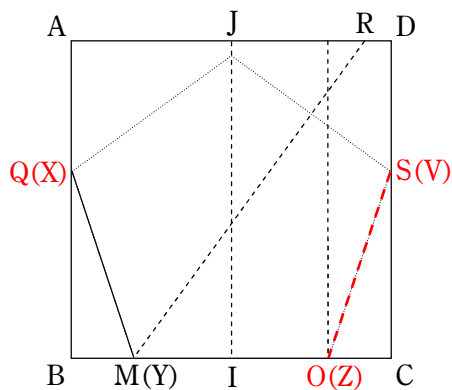
次に、O が辺 AB 上の点 Q にくるように、M を通る直線 MR で折る。

すると、点 Q は、AB 上で、 $MO = MQ = 2$ をみたす点なので、目標の正五角形の 3 つ目の頂点 (はじめの図の X) になっている。

折り返した MO に沿って MQ を折れば、これで正五角形の 2 辺目ができた。



目標の正五角形は IJ に関して線対称なので、IJ に関して Q と対称な点 S は、目標の正五角形の 4 つ目の頂点 (はじめの図の V) になっている。これで正五角形の 3 辺目ができた。



さらに、MR で折り返した OS に沿って、QT を折る。
 すると、目標の正五角形は $\angle QMO$ ($\angle XYZ$) の二等分線である MR に関しても線対称なので、QT は目標の正五角形の辺 WX を延長したものになっている。
 また、このとき、QT と IJ の交点 U は、正五角形の 5 つ目の頂点 (はじめの図の W) になっている。

最後に、SU を折れば、正五角形の 5 辺すべてが折れたことになる。

