

中2数学C 2019年度1学期 本問解答

§2 平方差

※ 欠席してしまった場合は、問 2.1～問 2.4, 問 2.7 を（余裕があれば問 2.5, 問 2.6 も）自分で確認し、p.12, p.13 の宿題 H2.1～H2.6 に取り組んで提出してください。

問2.1

$$(1) \quad (a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = \boxed{a^2 - b^2}$$

$$(2) \quad (5x+2y)(5x-2y) = (5x)^2 - (2y)^2 = \boxed{25x^2 - 4y^2}$$

(3)

$$(i) \quad a^2 - 4 = a^2 - 2^2 = \boxed{(a+2)(a-2)}$$

$$(ii) \quad a^2 - 4b^2 = a^2 - (2b)^2 = \boxed{(a+2b)(a-2b)}$$

$$(iii) \quad 9a^2 - 16b^2 = (3a)^2 - (4b)^2 = \boxed{(3a+4b)(3a-4b)}$$

問2.2

$$(1) \quad (3x+4y)(3x-4y) = (3x)^2 - (4y)^2 = \boxed{9x^2 - 16y^2}$$

(2)

$$(i) \quad a^2 - 36 = a^2 - 6^2 = \boxed{(a+6)(a-6)}$$

$$(ii) \quad 16a^2 - 25b^2 = (4a)^2 - (5b)^2 = \boxed{(4a+5b)(4a-5b)}$$

$$(iii) \quad (a+b)^2 - c^2 = \boxed{(a+b+c)(a+b-c)}$$

問2.3

(1)

$$(i) \quad (\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2 = 5 - 2 = \boxed{3}$$

$$(ii) \quad (\sqrt{3} + 2\sqrt{2})(\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{2})^2 = 3 - 4 \times 2 = \boxed{-5}$$

(2) (1)のように和と差の積を作れば、平方根のない形に変形できる。

$$\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{1}{\underbrace{(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} + \sqrt{2})}_{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1}} \times (\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{1} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

よって、この値を小数第2位まで正確に求めると、

$$1.732\cdots + 1.414\cdots = \boxed{3.14}\cdots$$

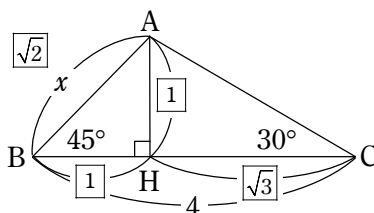
(3) AからBCに下ろした垂線の足をHとすると、
△ABH は直角二等辺三角形、△ACH は
30°, 60°, 90° の直角三角形なので、辺の比は右
図のようになり、

$$AB : BC = \sqrt{2} : (1 + \sqrt{3})$$

である。したがって、

$$x : 4 = \sqrt{2} : (1 + \sqrt{3})$$

$$\therefore x = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}} = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{\underbrace{(\sqrt{3} + 1) \times (\sqrt{3} - 1)}_{(\sqrt{3})^2 - 1^2 = 3 - 1 = 2}} = \cancel{4}^2 \times \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}_1} = \boxed{2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}}$$



問2.4

$$(1) \quad (3\sqrt{2} + 4)(3\sqrt{2} - 4) = (3\sqrt{2})^2 - 4^2 = 9 \times 2 - 16 = \boxed{2}$$

(2)

$$(i) \quad \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\underbrace{(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \times (\sqrt{5} - \sqrt{3})}_{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = 2}} \times (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = \boxed{\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}}$$

$$(ii) \quad \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\underbrace{(3 - 2\sqrt{2}) \times (3 + 2\sqrt{2})}_{3^2 - (2\sqrt{2})^2 = 9 - 4 \times 2 = 1}} \times (3 + 2\sqrt{2}) = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{1} = \boxed{3 + 2\sqrt{2}}$$

問2.5

E から AB に下ろした垂線の足を H とおく。

すると、△AEH は 30°, 60°, 90° の三角形なので、

$$AH : EH = \sqrt{3} : 1 \quad \dots\dots ①$$

△BEH は直角二等辺三角形なので、

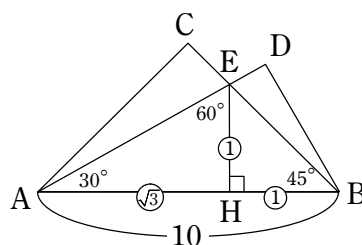
$$BH : EH = 1 : 1 \quad \dots\dots ②$$

$$①, ② \text{より、} AB : EH = (\sqrt{3} + 1) : 1$$

$$AB = 10 \text{ なので、} 10 : EH = (\sqrt{3} + 1) : 1$$

$$EH = 10 \times \frac{1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{10}{\sqrt{3} + 1} = \frac{10(\sqrt{3} - 1)}{\underbrace{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)}_{\sqrt{3}^2 - 1^2 = 3 - 1 = 2}} = \frac{10(\sqrt{3} - 1)}{2} = 5(\sqrt{3} - 1)$$

$$\text{よって、} \triangle ABE = \frac{1}{2} \times AB \times EH = \frac{1}{2} \times 10 \times 5(\sqrt{3} - 1) = 25(\sqrt{3} - 1) = \boxed{25\sqrt{3} - 25}$$



問2.6

$$(1) \quad \frac{120^2 - 97^2}{91^2 - 70^2} = \frac{(120+97)(120-97)}{(91+70)(91-70)} = \frac{\overset{31}{\cancel{217}} \times \cancel{23}}{\underset{7}{\cancel{161}} \times 21} = \boxed{\frac{31}{21}}$$

$$(2) \quad 9991 = 10000 - 9 = 100^2 - 3^2 = (100+3)(100-3) = \boxed{103 \times 97}$$

$$(3) \quad n^2 - (n+1)^2 = \{n + (n+1)\} \{n - (n+1)\} = -\{n + (n+1)\} \text{ であるから、}$$

$$S = (1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + \cdots + (99^2 - 100^2)$$

$$= -(1+2) - (3+4) - \cdots - (99+100)$$

$$= -(1+2+3+4+\cdots+99+100)$$

$$= -(1+100) \times 100 \div 2 = \boxed{-5050}$$

$$(4) \quad 2+1=3=2^2-1,$$

$$(2+1)(2^2+1)=3 \times 5=15=2^4-1$$

より,

$$T=2^{16}-1=U-2$$

と予想される。

実際、最初に $1=2-1$ を掛けるという細工をすると、

$$T=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$$

$$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$$

$$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)$$

$$=(2^8-1)(2^8+1)$$

$$=2^{16}-1$$

$$=U-2$$

$$\therefore \boxed{T=U-2}$$

となる。

なお、 T をすべて展開すると

$$T=1+2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{15}$$

となり、次のように $T=U-2$ を示すこともできる。

$$2T = \quad 2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{15}+2^{16}$$

$$\text{--)} \quad T=1+2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{15}$$

$$\hline T=-1 \qquad \qquad \qquad +2^{16}$$

$$\therefore T=2^{16}-1=U-2$$

問2.7

(1) ピタゴラスの定理より、

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

よって、

$$BC^2 = AB^2 - AC^2$$

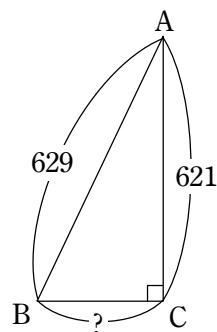
$$= 629^2 - 621^2$$

$$= (629 + 621)(629 - 621)$$

$$= 1250 \times 8$$

$$= 10000$$

$$\therefore BC = \sqrt{10000} = \boxed{100} (> 0)$$



(2) ピタゴラスの定理より、

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$x^2 = 12^2 + y^2 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

よって

$$x^2 - y^2 = 12^2$$

$$\therefore (x+y)(x-y) = 2^4 \times 3^2 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

ここで、整数 $x+y, x-y$ について、以下が成り立つことに注意する。

- x, y は $\triangle ABC$ の辺の長さだから正であり、 x は斜辺の長さだから (あるいは①より) $x > y$ である。よって、 $x+y > x-y > 0$
- $(x+y) + (x-y) = 2x$ は偶数だから、 $x+y, x-y$ の偶奇は一致

ゆえに、②より、

$$\begin{cases} x+y \\ x-y \end{cases} = \begin{cases} 144 \\ 1 \end{cases}, \begin{cases} 72 \\ 2 \end{cases}, \begin{cases} 48 \\ 3 \end{cases}, \begin{cases} 36 \\ 4 \end{cases}, \begin{cases} 24 \\ 6 \end{cases}, \begin{cases} 18 \\ 8 \end{cases}, \begin{cases} 16 \\ 9 \end{cases}, \begin{cases} 12 \\ 12 \end{cases}$$

したがって、

$$(x, y) = (37, 35), (20, 16), (15, 9), (13, 5)$$

