

中2数学C 2019年度1学期 本問解答

§3 完全平方形

※ 欠席してしまった場合は、問 3.1～問 3.7 を(余裕があれば問 3.8 も) 自分で確認し、p.18, p.19 の宿題 H3.1～H3.6 に取り組んで提出してください。

問3.1

$$(1) \quad (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = \boxed{a^2 + 2ab + b^2}$$

$$(2) \quad (a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = \boxed{a^2 - 2ab + b^2}$$

(1)の b を $-b$ で置き替えたと考えてもよい。

問3.2

$$(1) \quad (x+3y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3y + (3y)^2 = \boxed{x^2 + 6xy + 9y^2}$$

$$(2) \quad (3x-2)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = \boxed{9x^2 - 12x + 4}$$

$$(3) \quad (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = \boxed{5 + 2\sqrt{6}}$$

$$(4) \quad (3 - \sqrt{5})^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 9 - 6\sqrt{5} + 5 = \boxed{14 - 6\sqrt{5}}$$

問3.3

$$(1) \quad x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = \boxed{(x+1)^2}$$

$$(2) \quad 4x^2 - 20x + 25 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = \boxed{(2x-5)^2}$$

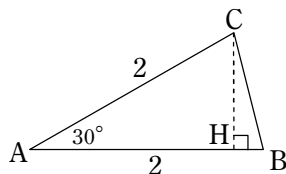
問3.4

(1) $\triangle ACH$ は 30° , 60° , 90° の直角三角形だから、

$$AH = AC \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \quad CH = AC \times \frac{1}{2} = 1$$

したがって、

$$BH = AB - AH = \boxed{2 - \sqrt{3}}$$



- (2) $\triangle BCH$ にピタゴラスの定理を用いると、(1)および $CH = AC \times \frac{1}{2} = 1$ より、

$$BC^2 = BH^2 + CH^2$$

$$= (2 - \sqrt{3})^2 + 1^2 = 2^2 - 4\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 + 1 = 8 - 4\sqrt{3}$$

したがって、

$$BC = \boxed{\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}}$$

問3.5

- (1) $CA = CD$ より、 $\angle CDA = \angle CAB = 30^\circ$ だから、
 $\triangle DBI$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形であり、

$$BD : BI = 2 : 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

また、 $AB = AC$ より、

$$\angle ABC = \angle ACB = \frac{180^\circ - \angle BAC}{2} = 75^\circ$$

だから、

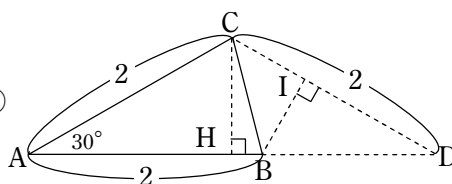
$$\angle CBI = 180^\circ - \angle ABC - \angle DBI = 180^\circ - 75^\circ - 60^\circ = 45^\circ$$

よって、 $\triangle CBI$ は直角二等辺三角形であり、

$$BI : BC = 1 : \sqrt{2} \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②より、

$$BD : BI : BC = 2 : 1 : \sqrt{2}, \quad \therefore BD : BC = \boxed{2 : \sqrt{2}} \left(= \boxed{\sqrt{2} : 1} \right)$$



- (2) C から AD へ下ろした垂線の足を H とすると、 $CA = CD$ より、 H は AD の中点と一致する。 $\triangle ACH$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形となるから、

$$AH = AC \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \quad \therefore AD = 2AH = 2\sqrt{3}$$

したがって、

$$BD = AD - AB = 2\sqrt{3} - 2$$

これと(1)より、

$$BC = \frac{\sqrt{2}}{2} BD = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2(\sqrt{3} - 1) = \boxed{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$$

※ 問 3.4 と問 3.5 の結論の見た目は異なるが、

$$(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 = 6 - 2\sqrt{12} + 2 = 8 - 4\sqrt{3}$$

より、同じ値を表していることが確かめられる。

問3.6

- (1) 二重根号が外れて、

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

と表せるとする。

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$$

なので、

$$\begin{aligned}\sqrt{5+2\sqrt{6}} &= \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \\ &= \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}\end{aligned}$$

$$\therefore 5+2\sqrt{6} = a+b+2\sqrt{ab}$$

が成り立つ。そこで、

掛けて 6 足して 5

となる 2 数 a, b を探してみると、3 と 2 が見つかる。よって、

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{3} + \sqrt{2} = 1.732050\cdots + 1.414213\cdots = \boxed{3.1462}\cdots$$

- (2) 二重根号が外れて、

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

と表せるとする。左辺は正の数なので、 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ も正の数であり、

$$a > b \cdots \cdots \cdots \star$$

であることに注意する。

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$$

なので、

$$\begin{aligned}\sqrt{7-2 \times 2\sqrt{3}} &= \sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} \\ &= \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}\end{aligned}$$

$$\therefore 7-2\sqrt{12} = a+b-2\sqrt{ab}$$

が成り立つ。そこで、

掛けて 12 足して 7

となる 2 数 a, b を探してみると、4 と 3 が見つかる。よって、☆に注意して、

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3} = 2 - 1.732050\cdots = \boxed{0.2679}\cdots$$

問3.7

少し見通しよく、一般化して比較してみよう。正の数 a に対し、

$$\begin{aligned}(\sqrt{a} + \sqrt{a+3})^2 &= a + 2\sqrt{a(a+3)} + a + 3 \\&= 2a + 3 + 2\sqrt{a^2 + 3a}, \\(\sqrt{a+1} + \sqrt{a+2})^2 &= a + 1 + 2\sqrt{(a+1)(a+2)} + a + 2 \\&= 2a + 3 + 2\sqrt{a^2 + 3a + 2}\end{aligned}$$

より、

$$(\sqrt{a} + \sqrt{a+3})^2 < (\sqrt{a+1} + \sqrt{a+2})^2$$

である。 $\sqrt{a} + \sqrt{a+3}$, $\sqrt{a+1} + \sqrt{a+2}$ は正なので、2乗しても大小関係は変わらないから、

$$\sqrt{a} + \sqrt{a+3} < \sqrt{a+1} + \sqrt{a+2}$$

と分かる。

$a = 2345$ を代入して、

$$\boxed{\sqrt{2345} + \sqrt{2348} < \sqrt{2346} + \sqrt{2347}}$$

問3.8

$$(1) \quad \sqrt{1} \times \sqrt{3} = \sqrt{3} = \boxed{1.7} \dots$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{4} = 2\sqrt{2} = 2 \times 1.41 \dots = \boxed{2.8} \dots$$

$$\sqrt{3} \times \sqrt{5} = 1.73 \dots \times 2.23 \dots = \boxed{3.8} \dots$$

$$\sqrt{4} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6} = 2 \times 2.44 \dots = \boxed{4.8} \dots$$

$$(2) \quad \sqrt{n} \times \sqrt{n+2} = \sqrt{n(n+2)} = \sqrt{n^2 + 2n} \text{ である。}$$

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

より、

$$n^2 < n^2 + 2n = (n+1)^2 - 1 < (n+1)^2$$

なので、

$$n < \sqrt{n} \times \sqrt{n+2} < n+1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

である。したがって、 $\sqrt{n} \times \sqrt{n+2}$ は必ず連続する2つの自然数の間にあるから、これが自然数と一致することはない。

(3) ①より、 $\sqrt{n} \times \sqrt{n+2} = \sqrt{n^2 + 2n}$ の小数第 1 位が 9 となるのは、

$$n + \frac{9}{10} \leq \sqrt{n^2 + 2n}$$

となるときである。両辺とも正なので 2 乗しても大小関係は変わらず、

$$n^2 + 2 \times n \times \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 \leq n^2 + 2n$$

$$\cancel{n^2} + \frac{9}{5}n + \frac{81}{100} \leq \cancel{n^2} + 2n$$

$$\frac{81}{100} \leq \frac{1}{5}n$$

$$\frac{81}{20} \leq n$$

n は自然数で、 $\frac{81}{20} = 4 + \frac{1}{20}$ だから、この条件をみたすのは $\boxed{n \geq 5}$ のときである。

(4) ①より、 $\sqrt{n} \times \sqrt{n+2} = \sqrt{n^2 + 2n}$ の小数第 1 位から第 10 位がすべて 9 となるのは、

$$n + 1 - \frac{1}{10^{10}} \leq \sqrt{n^2 + 2n}$$

となるときである。両辺とも正なので 2 乗しても大小関係は変わらず、

$$n^2 + 2 \times n \times \left(1 - \frac{1}{10^{10}}\right) + \left(1 - \frac{1}{10^{10}}\right)^2 \leq n^2 + 2n$$

$$\cancel{n^2 + 2n} - \frac{2}{10^{10}}n + \left(1 - \frac{1}{10^{10}}\right)^2 \leq \cancel{n^2 + 2n}$$

$$\left(1 - \frac{1}{10^{10}}\right)^2 \leq \frac{2}{10^{10}}n$$

$$1 - 2 \times \frac{1}{10^{10}} + \left(\frac{1}{10^{10}}\right)^2 \leq \frac{2}{10^{10}}n$$

$$1 - \frac{2}{10^{10}} + \frac{1}{10^{20}} \leq \frac{2}{10^{10}}n$$

$$\frac{10^{10}}{2} - 1 + \frac{1}{2 \times 10^{10}} \leq n$$

$$5 \times 10^9 - 1 + \frac{1}{2 \times 10^{20}} \leq n$$

n は自然数だから、この条件をみたすのは $\boxed{n \geq 5 \times 10^9}$ のときである。