

中2数学C 2019年度1学期 本問解答

§4 ピタゴラス数

※ 欠席してしまった場合は、問 4.1, 問 4.2, 問 4.4(2)を（余裕があれば問 4.4(1)も）自分で確認し、p.22, p.23 の宿題 H4.1～H4.5 に取り組んで提出してください。

問4.1

(1) $1^2 = 4 \times 0 + \underline{1}$, $2^2 = 4 \times 1 + \underline{0}$, $3^2 = 4 \times 2 + \underline{1}$,
 $4^2 = 4 \times 4 + \underline{0}$, $5^2 = 4 \times 6 + \underline{1}$, $6^2 = 4 \times 9 + \underline{0}$, ...

であり、平方数を4で割った余りは0 か1であると予想される。

(2) 偶数 $2m$ (m は整数) の2乗は

$$(2m)^2 = 4m^2 \quad (4 \times (\text{整数}) \text{ の形})$$

となるから、4で割った余りは0である。

奇数 $2m+1$ (m は整数) の2乗は

$$(2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 4(m^2 + m) + 1 \quad (4 \times (\text{整数}) + 1 \text{ の形})$$

となるから、4で割った余りは1である。

以上より、(1)の予想が正しいことが示された。

(3) $12345678987654 = 12345678987600 + 54$
 $\quad = \underbrace{4 \times 25}_{100} \times 123456789876 + 54$

を4で割った余りは、下2桁の54を4で割った余りに等しく、 $54 = 4 \times 13 + 2$ より、それは2である。したがって、(2)より、 $x^2 = 12345678987654$ となる自然数 x は存在しない。

問4.2

(1) $1^2 = 3 \times 0 + \underline{1}$, $2^2 = 3 \times 1 + \underline{1}$, $3^2 = 3 \times 3 + \underline{0}$,
 $4^2 = 3 \times 5 + \underline{1}$, $5^2 = 3 \times 8 + \underline{1}$, $6^2 = 3 \times 12 + \underline{0}$, ...

であり、平方数を3で割った余りは0か1であると予想される。

(2) 整数 n は、3で割った余りで分類して、
 $3m$, $3m+1$, $3m+2$ (m は整数)

のいずれかの形で表せる。

(i) $n = 3m$ のとき、
 $n^2 = 9m^2 = 3 \times 3m^2$ ($3 \times (\text{整数})$ の形)

となるから、 n^2 を3で割った余りは0である。

(ii) $n = 3m+1$ のとき、
 $n^2 = (3m+1)^2 = 9m^2 + 6m + 1 = 3(3m^2 + 2m) + 1$ ($3 \times (\text{整数}) + 1$ の形)

となるから、 n^2 を3で割った余りは1である。

(iii) $n = 3m+2$ のとき、
 $n^2 = (3m+2)^2 = 9m^2 + 12m + 4$
 $= 3 \times 3m^2 + 3 \times 4m + 3 + 1 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 1$ ($3 \times (\text{整数}) + 1$ の形)

となるから、 n^2 を3で割った余りは1である。

以上より、(1)の予想が正しいことが示された。

(3) $2436236 = 3 \times 812078 + 2$ を3で割った余りは2である。したがって、(2)より、
 $x^2 = 2436236$ となる自然数 x は存在しない。

※ 自然数を3で割った余りは、各位の数の和を3で割った余りに等しい。
このことを使えば、

$$\begin{aligned} (2436236 \text{ を } 3 \text{ で割った余り}) &= (\underline{2+4+3+6+2+3+6} \text{ を } 3 \text{ で割った余り}) \\ & \quad (\text{下線部はそれぞれ } 3 \text{ の倍数とすぐわかるので}) \\ &= 2 \end{aligned}$$

と、商を求めずに余りだけ計算できる。

破線部を証明しよう。何桁でも同様なので4桁の自然数(千の位、百の位、十の位、一の位をそれぞれ a, b, c, d とする)について説明する：

$$\begin{aligned} 1000a + 100b + 10c + d &= 999a + 99b + 9c + a + b + c + d \\ &= 3 \times (333a + 33b + 3c) + a + b + c + d \end{aligned}$$

で、 $333a + 33b + 3c$ が整数だから、下線部は3で割り切れる。したがって、
 $1000a + 100b + 10c + d$ を3で割った余りは各位の数の和 $a + b + c + d$ を3で割った余りと等しい。

問4.3

- (1) (a, b, c) がピタゴラス数であるとすれば、

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

$$c^2 - b^2 = a^2,$$

$$\therefore (c+b)(c-b) = a^2 \quad \dots\dots ①$$

が成り立つ。例えば、

$$\begin{cases} c+b = a^2 & \dots\dots ② \\ c-b = 1 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

は①をみたす。これを b, c について解くと、

$$\frac{②-③}{2} \text{ より、 } b = \frac{a^2-1}{2}, \quad \frac{②+③}{2} \text{ より、 } c = \frac{a^2+1}{2}$$

となる。 a が 3 以上の奇数ならば、 a^2-1, a^2+1 は正の偶数なので、 $\left(\frac{a^2-1}{2}, \frac{a^2+1}{2}\right)$

は自然数の組を表している。したがって、3 以上の奇数 a に対し、

$$(a, b, c) = \left(a, \frac{a^2-1}{2}, \frac{a^2+1}{2}\right) \quad \dots\dots\dots ④$$

はピタゴラス数である。しかも、 $c-b=1$ より、 b, c は連続する自然数だから、 b, c の最大公約数は 1 であり、したがって、 a, b, c の最大公約数も 1 となる。つまり、④で定まる (a, b, c) は既約ピタゴラス数である。3 以上の奇数は無数に存在するから、既約ピタゴラス数が無限に存在することが示された。

- (2) いろんなことが予想できるが、ここでは

(a, b, c) がピタゴラス数ならば、 a, b の少なくとも一方は 3 の倍数であることを挙げておく。

証明

(a, b, c) がピタゴラス数であるとする：

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \dots\dots\dots ①$$

もし、 a も b も 3 の倍数でないとすると、問 4.2 より、 a^2, b^2 を 3 で割った余りはそれぞれ 1 になるから、①の左辺を 3 で割った余りは $1+1=2$ となる。ところが、再び問 4.2 から、 c^2 を 3 で割った余りは 0 または 1 しかあり得ないから、これは①の等式が成り立つことに矛盾する。したがって、 a も b も 3 の倍数でないとした仮定は誤りであって、 a, b の少なくとも一方は 3 の倍数であることが分かった。