中2数学C 2019年度1学期 本問解答
§5 平方完成と2次方程式

※ 欠席してしまった場合は、問 5.1〜問 5.5 を（余裕があれば問 5.6 も）自分で確認し、p.27 の宿題 H5.1〜H5.4 に取り組んで提出してください。

問5.1

長方形 ABCD の面積が 6 であることより、

$$\mathrm{AB}\times\mathrm{AD}=6 \quad \cdots\cdots ①$$

(1) $\mathrm{AD}=\mathrm{AB}=x$ のとき、①は

$$x\times x=6 \qquad \therefore \boxed{x^2=6}$$

となる。よって、x は 6 の平方根であり、正の数なので、$\boxed{x=\sqrt{6}}$

(2) $\mathrm{AD}=\mathrm{AB}+1=x+1$ のとき、①は

$$\boxed{x(x+1)=6}$$

となる。この方程式の解として、$\boxed{x=2}$ が見つかる。

なお、AB の長さが長くなるにつれて、長方形 ABCD の面積も大きくなるので、AB の長さは一つに決まる。したがって、この問題の答は $\boxed{x=2}$ のみである。

(3) $\mathrm{AD}=\mathrm{AB}+2=x+2$ のとき、①は

$$\boxed{x(x+2)=6}$$

となる。

次の問 5.2 で、このときの $x=\mathrm{AB}$ を求める方法を考えよう。

問5.2

(1)

(i) $x^2=4$ より、x は 4 の平方根で、$\boxed{x=2,-2}$ と求まる。

(ii) $(x+1)^2=4$ より、$x+1$ は 4 の平方根で、$x+1=2,-2$

$$\therefore \boxed{x=1,-3}$$

と求まる。

(iii) $(x+1)^2=5$ より、$x+1$ は 5 の平方根で、$x+1=\sqrt{5},-\sqrt{5}$

$$\therefore \boxed{x=-1+\sqrt{5},-1-\sqrt{5}}$$

と求まる。

(2) 問 5.1 (3)の方程式

$$x(x+2)=6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

も、(1)で解いたような $(x+\boxed{})^2=\boxed{}$ の形に変形してみよう。

$$x^2+2x=6$$

の左辺の x^2+2x は展開式 $(x+1)^2=x^2+2x+1$ に現れるので、

$$x^2+2x+1=7$$
$$(x+1)^2=7$$

と書き直せる。これより、$x+1$ は 7 の平方根なので、

$$x+1=\sqrt{7},-\sqrt{7}$$
$$\therefore x=-1+\sqrt{7},-1-\sqrt{7}$$

となり、①の解が求まる。

一方、問題の設定より、$x>0$ なので、$\boxed{x=-1+\sqrt{7}}$ である。

問5.3

(1) $x^2+2x+\boxed{1}=(x+\boxed{1})^2$

(2) $x^2-4x+\boxed{4}=(x+\boxed{-2})^2$

(3) $x^2+6x+\boxed{9}=(x+\boxed{3})^2$

(4) $x^2-x+\boxed{\dfrac{1}{4}}=(x+\boxed{-\dfrac{1}{2}})^2$

(5) $x^2+\dfrac{1}{2}x+\boxed{\dfrac{1}{16}}=(x+\boxed{\dfrac{1}{4}})^2$

問5.4

(1) 平方完成

$$x^2-6x+9=(x-3)^2$$

を利用して、

$$x^2-6x-8=0$$

$$x^2-6x+9=17$$

$$(x-3)^2=17$$

$$x-3=\sqrt{17},-\sqrt{17}$$

よって、$\boxed{x=3+\sqrt{17},3-\sqrt{17}}$

(2) 平方完成

$$x^2+8x+16=(x+4)^2$$

を利用して、

$$x^2+8x+8=0$$

$$x^2+8x+16=8$$

$$(x+4)^2=8$$

$$x+4=\sqrt{8},-\sqrt{8}$$

$$=2\sqrt{2},-2\sqrt{2}$$

よって、$\boxed{x=-4+2\sqrt{2},-4-2\sqrt{2}}$

(3) まず両辺を 3 で割って、

$$x^2+\boxed{}x+\boxed{}=0$$

の形に整理すると、

$$3x^2-6x-12=0$$

$$x^2-2x-4=0$$

平方完成

$$x^2-2x+1=(x-1)^2$$

を利用して、

$$x^2-2x+1=5$$

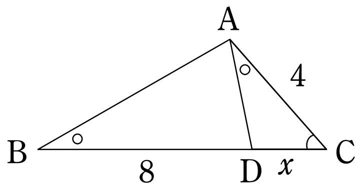
$$(x-1)^2=5$$

$$x-1=\sqrt{5},-\sqrt{5}$$

よって、$\boxed{x=1+\sqrt{5},1-\sqrt{5}}$

問5.5

$\triangle$ABC と$\triangle$DAC について、



$\angle ABC = \angle DAC$ (仮定)

$\angle ACB = \angle DCA$ (共通)

だから、二角相等で

$\triangle ABC \backsim \triangle DAC$

である。よって、対応辺を考え、

$BC : CA = AC : CD$

$CD = x$ とおくと、

$$(8+x) : 4 = 4 : x$$

$$\frac{8+x}{4} = \frac{4}{x}$$

$$(8+x)x = 4 \times 4$$

$$\therefore\ x^2 + 8x = 16 \cdots\cdots ①$$

を得る。平方完成$x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$ を利用して、さらに書き換えると

$$x^2 + 8x + 16 = 32$$

$$(x+4)^2 = 32$$

$$x + 4 = 4\sqrt{2},\ -4\sqrt{2}$$

よって、①の解は$x = -4 + 4\sqrt{2},\ -4 - 4\sqrt{2}$ である。

$x = CD > 0$ だから、$CD = \boxed{-4 + 4\sqrt{2}}$

問5.6

長さ$x, x+1, x+3$の線分が直角三角形をなすとき、一番長い辺である$x+3$が斜辺になっているので、ピタゴラスの定理より

$$x^2 + (x+1)^2 = (x+3)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots ☆$$

となる。この方程式を整理すると

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 6x + 9$$

$$x^2 - 4x - 8 = 0$$

なので、平方完成$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$を利用して、

$$x^2 - 4x + 4 = 12$$

$$(x-2)^2 = 12$$

$$x - 2 = 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}$$

よって、☆の解は$x = 2 + 2\sqrt{3}, 2 - 2\sqrt{3}$ となる。

ここで、$x, x+1, x+3$は辺の長さなので$x > 0$であり、$\boxed{x = 2 + 2\sqrt{3}}$ となる。