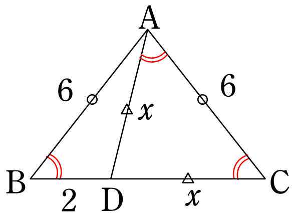
中2数学C 2019年度1学期 本問解答
§6 折り紙で正五角形

※ 欠席してしまった場合は、問 6.1, 問 6.2 を（余裕があれば問 6.3〜問 6.6 も）自分で確認しておきましょう。p.31 の宿題 H6.1〜H6.5 は、§5 までの復習です。すべて取り組んで提出してください。

問6.1



(1) △ABC は $AB = AC$ の二等辺三角形なので、

$\angle ABC = \angle ACB$ ………………………… ①

△DCA は $DA = DC$ の二等辺三角形なので、

$\angle DCA = \angle DAC$ ………………………… ②

△ABC と△DCA について、①, ②より、

$\angle ABC = \angle DCA$， $\angle ACB = \angle DAC$

だから、二角相等で、

△ABC ∽ △DCA

が成り立つ。よって、対応辺の比を考えて、

$AB : BC = DC : CA$

$AD = DC = x$ とおくと、

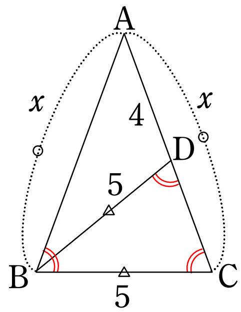
$6 : (2 + x) = x : 6 \qquad (2 + x)x = 36 \qquad \therefore x^2 + 2x = 36$

を得る。これを解くと、

$x^2 + 2x + 1 = 36 + 1 \qquad (x + 1)^2 = 37$

$x + 1 = \sqrt{37}, -\sqrt{37} \qquad \therefore x = -1 + \sqrt{37}, -1 - \sqrt{37}$

であるが、$x > 0$ だから、$AD = x = \boxed{-1 + \sqrt{37}}$



(2) △ABC は $AB = AC$ の二等辺三角形なので、

$\angle ABC = \angle ACB$ ………………………… ①

△BCD は $BC = BD$ の二等辺三角形なので、

$\angle BCD = \angle BDC$ ………………………… ②

△ABC と△BCD について、①, ②より、

$\angle ABC = \angle BCD$， $\angle ACB = \angle BDC$

だから、二角相等で、

△ABC ∽ △BCD

が成り立つ。よって、対応辺の比を考えて、

$AB : BC = BC : CD$

$AB = AC = x$ とおくと、

$x : 5 = 5 : (x - 4) \qquad x(x - 4) = 25 \qquad \therefore x^2 - 4x = 25$

を得る。これを解くと、

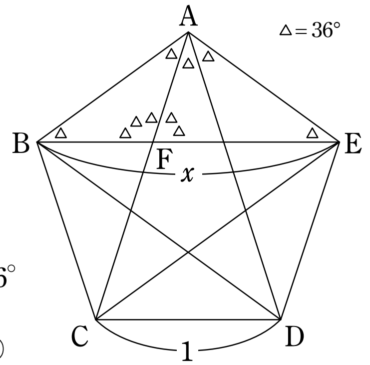
$$x^2-4x+4=25+4 \qquad (x-2)^2=29$$
$$x-2=\sqrt{29},-\sqrt{29} \qquad \therefore x=2+\sqrt{29},2-\sqrt{29}$$

であるが、$x>0$ だから、$\mathrm{AB}=x=\boxed{2+\sqrt{29}}$

問6.2

対角線 AC, BE の交点を F とおく。

△ABC, △BCD, △CDE, △DEA, △EAB は二辺夾角相等で合同なので、対応する辺は等しく、対角線 AC, BD, CE, DA, EB の長さはすべて等しい。



正五角形の一つの内角の大きさは

$$\frac{180°\times 3}{5}=108°$$

で、正五角形の 1 つの頂点とその両隣の頂点を結ぶ二等辺三角形の底角の大きさは

$$\frac{180°-108°}{2}=36°$$

となる。すると、△ABE と△FBA はどちらも底角が 36° の二等辺三角形であるから、二角相等で

$\triangle\mathrm{ABE} \backsim \triangle\mathrm{FBA}$ ……………………………………………①

が成り立つ。よって、対応辺の比を考えて、

$\mathrm{AB}:\mathrm{BE}=\mathrm{FB}:\mathrm{BA}$ ……………………………………………②

ここで、

$\angle\mathrm{EAF}=\angle\mathrm{EAB}-\angle\mathrm{FAB}=108°-36°=72°,$

$\angle\mathrm{EFA}=\angle\mathrm{EFB}-\underline{\angle\mathrm{AFB}}=\angle\mathrm{EFB}-\underline{\angle\mathrm{EAB}}$ （①の対応角）

$=180°-108°=72°$

だから、△EAF は EF=EA $(=1)$ の二等辺三角形である。よって、求める対角線の長さ BE を x とおくと、$\mathrm{FB}=\mathrm{EB}-\mathrm{EF}=x-1$ となるから、②より、

$1:x=(x-1):1$

$x(x-1)=1$

$\therefore x^2-x=1$ ……………………………………………③

を得る。これを解くと、

$$x^2-x+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{4} \qquad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$
$$x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2},-\frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \therefore x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$x>0$ だから、求める対角線の長さは $\mathrm{BE}=x=\boxed{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ である。

※　右図（Gは対角線 AC, BD の交点）に着目して、

$$\triangle ACD \backsim \triangle DCG$$ （二角相等)

の対応辺の比を考えても

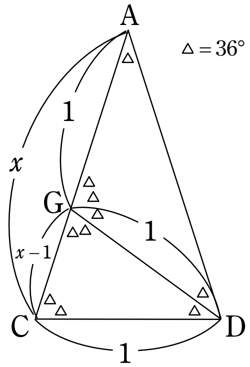
$$AC : CD = DC : CG$$

$$x : 1 = 1 : (x - 1)$$

$$x(x - 1) = 1$$

$$\therefore x^2 - x = 1$$

と③と同じ方程式を得る。

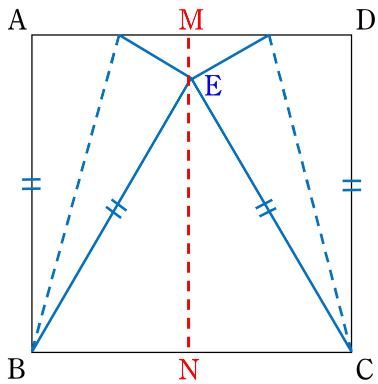


問6.3

折り紙の正方形を ABCD とする。
まず、AB と DC が重なるように ABCD を二つに折り、折り目 MN をつける。
次に、A が折り目 MN 上の点 E にくるように、B を通る直線で折る。MN に関する対称性より、D が折り目 MN 上にくるように、C を通る直線でおれば、D は E に重なる。
すると、 $EB = AB$, $CE = CD$ であるが、ABCD は正方形で $AB = BC = CD$ であることと合わせると、

$$EB = BC = CE$$

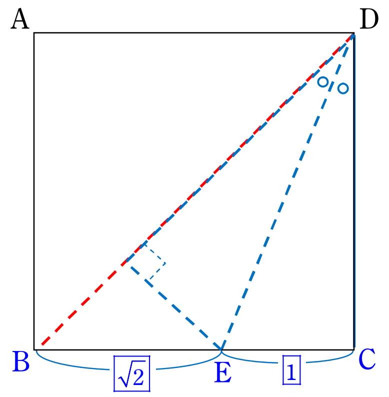
と分かる。よって、△EBC は 3 辺が等しいので正三角形である。



最後に、EB, EC に沿って折り目をつければ、正三角形の折り目が折れたことになる。

問6.4

まず、A と C が重なるように ABCD を二つに折り、対角線 BD の折り目をつける。△BCD は直角二等辺三角形だから $BD:CD=\sqrt{2}:1$ である。



次に、CD が BD に重なるように△BCD を折り、折り目 DE をつける。すると、

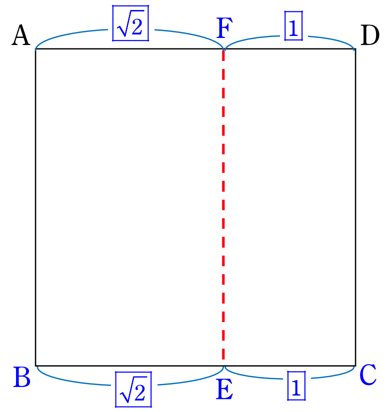
$$\angle BDE=\angle CDE$$

なので、角の 2 等分線と比の定理より、

$$BE:EC=BD:CD=\sqrt{2}:1$$

が分かる。

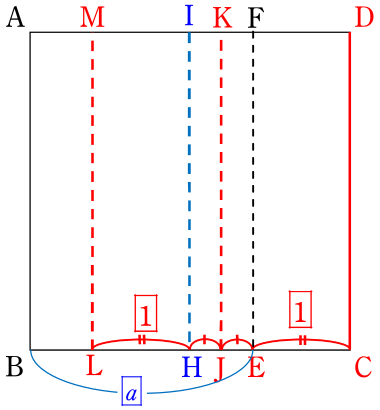
よって、C が線分 BE 上にくるように、E を通る直線 EF で折れば、これが目標の折り目である。

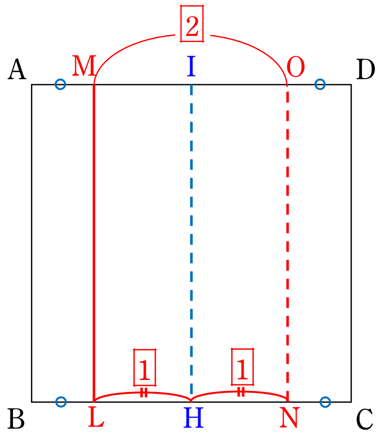


問6.5

BC, AD を $a:1$ に内分する点を E, F としておく。

まず、AB と DC が重なるように ABCD を折り、折り目 HI をつける。さらに、E と H が重なるように ABCD を EH の垂直二等分線 JK で折り、JK で折り返した CD に沿って折り目 LM をつける。
次に、HI で折り返した LM に沿って、折り目 NO をつける。
すると、$\mathrm{HL}=\mathrm{HN}$ なので、LM, NO が目標の折り目である。

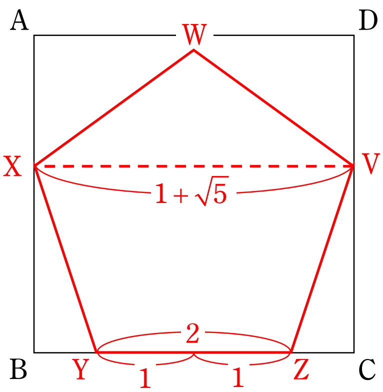




問6.6

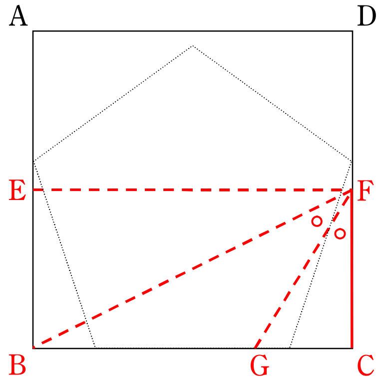
問 6.2 より、1 辺の長さが 2 の正五角形の対角線の長さは$1+\sqrt{5}$になる。

1 辺の長さ$1+\sqrt{5}$の正方形 ABCD の中に、下図のように正五角形 VWXYZ を折ることにする。正五角形の対角線 XV が正方形の 1 辺と等しくなるので、正五角形の 1 辺の長さは 2 である。



このとき、図の頂点 Y と Z は、BC の中点から 1 だけ離れた点になっていることに注意しよう。

手順①



AD と BC が重なるように ABCD を二つに折り、折り目 EF をつける。

さらに、BF に折り目をつけ、CF が BF に重なるように△BFC を折り、折り目 FG をつける。

すると、BC : CF = 2 : 1 なので、ピタゴラスの定理より、

$$BC:CF:BF=2:1:\sqrt{2^2+1^2}$$

$\therefore BF:CF=\sqrt{5}:1$

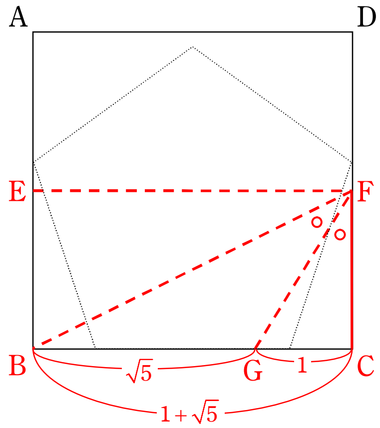
となっており、∠BFG=∠CFG なので、角の 2 等分線と比の定理より、

$$BG:GC=BF:CF=\sqrt{5}:1$$

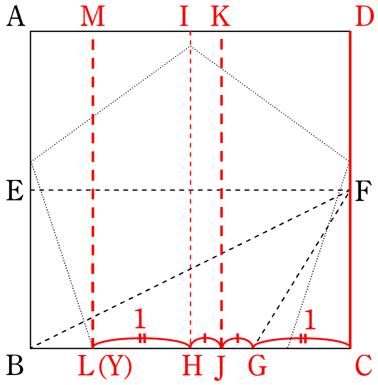
が分かる。いま、$BC=1+\sqrt{5}$なので、

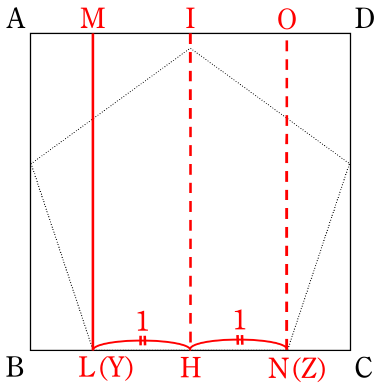
$$BG=\sqrt{5},\ GC=1$$

となっている。



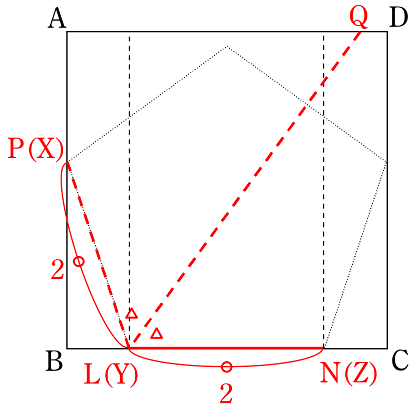
手順②





問 6.5 において $a=\sqrt{5}$ の場合を考える。（辺 AD の方には $\sqrt{5}:1$ に内分する点は取っていないが、問 6.5 では F を使わなかったことを思い出そう。）点 G を問 6.5 の E として、結果を用いれば、点 L と点 N が目標の正五角形の 2 つの頂点（はじめの図の Y と Z）になっている。
LN は正五角形の 1 辺目である。

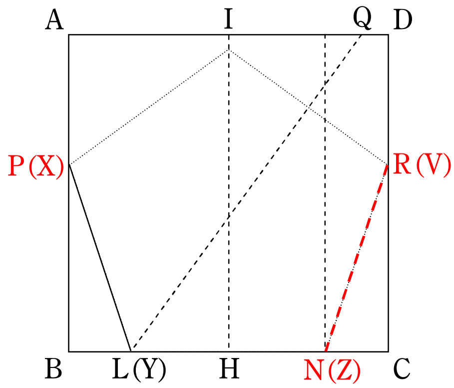
手順③



N が辺 AB 上の点 P にくるように、L を通る直線 LQ で折る。

すると、点 P は、AB 上で、LN＝LP＝2 をみたす点なので、目標の正五角形の 3 つ目の頂点（はじめの図の X）になっている。折り返した LN に沿って LP を折れば、これで正五角形の 2 辺目ができた。

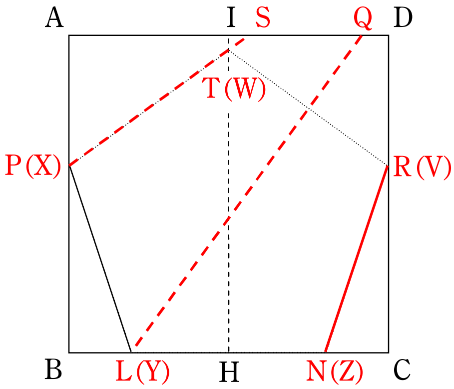
手順④



HI で折り返した LP に沿って、NR を折る。

すると、目標の正五角形は HI に関して線対称なので、P と HI に関して対称な R は、目標の正五角形の 4 つ目の頂点（はじめの図の V）になっている。
これで正五角形の 3 辺目ができた。

手順⑤



LQ で折り返した NR に沿って、PS を折る。

すると、目標の正五角形は∠PLN（∠XYZ）の二等分線である LQ に関しても線対称なので、PS は目標の正五角形の辺 WX を延長したものになっている。
また、このとき、PS と HI の交点 T は、正五角形の 5 つ目の頂点（はじめの図の W）になっている。

手順⑥

最後に RT を折れば、正五角形の 5 辺すべてが折れた！